VISIT…

12345 × 8 + 5 = 98765

Я.И.ПЕРЕЛЬМАН

МАТЕМАТИКА
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Annotation

Эта книга основателя жанра научно-занимательной литературы, российского ученого Я. И. Перельмана объединяет в себе две работы автора: «Занимательная математика» и «Занимательная арифметика». Она ставит целью привить своему читателю вкус к изучению математики, вызвать у него интерес к самостоятельным творческим занятиям и приобщает к миру научных знаний.

Книга содержит увлекательные рассказы-задачи с необычными сюжетами на математические темы, любопытными примерами из повседневной жизни, головоломки, шуточные вопросы и опыты - и все это через игру, легко и непринужденно.

Постановка задач, их арифметические и логические методы решений и вытекающие из решений выводы вызовут интерес не только у юных начинающих математиков, знакомых лишь с элементами арифметики, но и у хорошо разбирающихся в математике читателей.

Авторская стилистика письма соответствует 20-м годам двадцатого века и сохранена без изменений.

- Яков Исидорович Перельман
  - Часть первая
    - Предисловие
    - На мыльном пузыре[1]
    - Машина времени
    - На комете
    - Предшественник Нансена
    - Универсальная библиотека
    - Литературная машина
    - История одной игры
    - Странная задача на премию
    - Числовые анекдоты
    - Хитрое разрешение мудреной задачи
  - Часть вторая
    - Предисловие
    - Глава I

- Таинственные знаки
- «Таинственные знаки».
- Старинная народная нумерация
- Секретные торговые меты
- Арифметика за завтраком
- Арифметические ребусы
- Десятичная система в книжных шкафах
- Круглые числа

- Глава II
  - Чеховская головоломка
  - Русские счеты
  - Умножение на счетах
  - Деление на счетах
  - Улучшение счетов
  - Отголоски старины
- Глава III
  - «Трудное дело - деление»
  - Мудрый обычай старины
  - Хорошо ли мы множим?
  - Русский способ умножения
  - Из страны пирамид
- Глава IV
  - Загадочная автобиография
  - Простейшая система счисления
  - Необычайная арифметика
  - Чет или нечет?
  - Дроби без знаменателя
- Глава V
  - Арифметическая кунсткамера
  - Число 12
  - Число 365
  - Три девятки
  - Число шехеразады
  - Число 10101
  - Число 10001
  - Шесть единиц
  - Числовые пирамиды

- Девять одинаковых цифр
- Цифровая лестница
- Магические кольца
- Феноменальная семья

- Глава VI
  - Искусство индусского царя
  - Не вскрывая конвертов
  - Угадать число спичек
  - Чтение мыслей по спичкам
  - Идеальный разновес
  - Предсказать сумму ненаписанных чисел
  - Предугадать результат
  - Мгновенное деление
  - Любимая цифра
  - Угадать день рождения
  - Одно из «утешных действий» Магницкого
- Глава VII
  - Действительные и мнимые феномены
  - «Сколько мне недель?»
  - «Сколько мне дней?»
  - «Сколько мне секунд?»
  - Приемы ускоренного умножения
  - Какой день недели?
  - Календарь на часах
  - Календарные задачи
- Глава VIII
  - Как велик миллион?
  - Миллион секунд
  - В миллион раз толще волоса
  - Упражнения с миллионом
  - Названия числовых великанов
  - Миллиард
  - Биллион и триллион
  - Квадрильон
  - Кубическая миля и кубический километр
  - Исполины времени
- Глава IX

        - От великанов к карликам
        - Лилипуты времени
        - Лилипуты пространства
        - Сверх-исполин и сверх-лилипут
    - Глава X
        - Ваше кругосветное путешествие
        - Ваше восхождение на Монблан
        - Пахари-путешественники
        - Незаметное путешествие на дно океана
        - Путешествующие стоя на месте
- notes
    - 1
    - 2
    - 3
    - 4
    - 5
    - 6
    - 7
    - 8
    - 9
    - 10
    - 11
    - 12
    - 13
    - 14
    - 15
    - 16
    - 17
    - 18
    - 19
    - 20
    - 21
    - 22
    - 23
    - 24
    - 25
    - 26

- 27
- 28
- 29
- 30
- 31
- 32
- 33
- 34
- 35
- 36
- 37
- 38
- 39
- 40
- 41
- 42
- 43
- 44
- 45
- 46
- 47
- 48
- 49
- 50
- 51
- 52
- 53
- 54
- 55
- 56
- 57
- 58
- 59
- 60
- 61
- 62
- 63

- 64
- 65
- 66
- 67
- 68
- 69
- 70
- 71
- 72
- 73
- 74
- 75
- 76
- 77
- 78
- 79
- 80
- 81
- 82
- 83
- 84
- 85
- 86
- 87
- 88
- 89
- 90
- 91
- 92
- 93
- 94
- 95
- 96

Яков Исидорович Перельман

Математика для любознательных

Часть первая
Занимательная математика

Предисловие

В поисках средств для оживления в широких кругах интереса к математике мне пришла мысль собрать ряд произведений, трактующих математические темы в беллетристической или полубеллетристической форме, и предложить их читателю с соответствующими комментариями. Число таких произведений, конечно, весьма ограничено. Этим объясняются скромные размеры настоящего сборника. Однако затрагиваемые в нем математические темы все же довольно разнообразны: относительность пространства и времени, четырехмерный мир, расчеты из области небесной механики, вопросы математической географии, комбинаторика и исполинские числа, приложение математического анализа к играм, неопределенный анализ, уравнения. Можно надеяться, что этот небольшой сборник натолкнет иных читателей на более серьезные размышления и побудит к систематическому ознакомлению с тем или иным отделом математики.

Настоящий сборник является первым известным мне опытом подобного рода.

Я. И.

На мыльном пузыре[1]

Рассказ Курда Лассвица

I

- Дядя Вендель! А дядя Вендель! Какой большой мыльный пузырь, смотри… Что за чудные краски! Откуда такие? - кричал мой сынишка из окна в сад, куда он сбрасывал свои пестрые мыльные пузыри.

Дядя Вендель сидел со мной в тени высокого дерева, и сигары наши улучшали чистый воздух прелестного летнего дня.

- Гм! - проворчал, обращаясь ко мне, дядя Вендель. - Ну-ка объясни ему! Желал бы я видеть, как ты с этим справишься. Интерференция в тонких пластинках, не так ли? Волны различной длины, полосы, не покрывающие друг друга, и т. д. Много бы из этого понял мальчуган! Гм…

Дядя Вендель сделал уже ряд открытий. В сущности, он ничего, кроме открытий, и не делал. Его квартира была настоящая лаборатория - наполовину мастерская алхимика, наполовину - современный

физический кабинет. Удостоиться проникнуть в него было большою честью. Все открытия свои он держал в секрете. Лишь изредка, в тесном кругу, приподнимал он немного завесу своих тайн. И тогда я изумлялся его учености, а еще больше - глубине проникновения в научные методы, в эволюцию культурных достижений. Но немыслимо было убедить его выступить публично со своими взглядами, а следовательно, и с открытиями, которые, как он утверждал, не могут быть поняты без его новых теорий. Я сам присутствовал при том, как он искусственным путем приготовил белок из неорганических веществ. Когда я настаивал, чтобы он обнародовал это выдающееся открытие, способное, быть может, совершенно преобразовать наши социальные отношения, он отвечал:

- Не имею охоты выставлять себя на посмешище. Не поймут. Не созрели еще. Никаких общих точек… Другой мир, другой мир! Лет через тысячу… Пусть себе спорят… Все одинаково невежественны…

Последним открытием его был «микроген». Не знаю наверное, что это такое - особое вещество или аппарат. Но насколько я понял, дядя Вендель мог посредством него достигать уменьшения как пространственных, так и временных отношений в любом масштабе. Уменьшения не только для глаза, какое достигается с помощью оптических приборов, но и для всех прочих чувств. Деятельность сознания изменяется так, что хотя восприятия остаются качественно неизменными, все количественные отношения сокращаются. Дядя утверждал, что любого человека и всю воспринимаемую им окружающую обстановку он может уменьшить в миллион или в биллион раз. Как? В ответ на этот вопрос дядя тихо рассмеялся про себя и пробормотал:

- Гм… Не понять вам… Невозможно объяснить. Совершенно бесполезно!… Не хочешь ли лучше испытать на себе? Да? Взгляни-ка на эту вещицу.

Он вынул из кармана небольшой аппарат. Я различил несколько стеклянных трубок в металлической оправе с винтами и мелкой шкалой. Дядя поднес трубки к моему носу и начал что-то вращать. Я почувствовал, что вдыхаю нечто необычное.

- Как красиво! - снова воскликнул мой сынишка, восхищенный новым мыльным пузырем, который плавно опускался с подоконника.

- Всматривайся в этот пузырь, - сказал дядя, продолжая вертеть.

Мне показалось, что пузырь у меня на глазах увеличивается. Я словно приближался к нему все более и более. Окно с мальчиком, стол, за которым мы сидели, деревья сада - все отодвигалось вдаль, становилось туманнее. Один лишь дядя по-прежнему оставался вблизи меня; трубки свои он снова положил в карман. Наконец прежняя обстановка наша исчезла совсем. Подобно исполинскому матовому куполу, расстилалось над нами небо, примыкавшее к горизонту. Мы стояли на зеркальной глади обширного замерзшего моря. Лед был гладок и без трещин. Тем не менее, он, казалось, находился в легком волнообразном движении. Здесь и там возвышались над гладью какие-то неясные фигуры.

- Что произошло? - крикнул я в испуге. - Где мы? Несемся по льду?

- По мыльному пузырю, - невозмутимо ответил дядя. - Ты принимаешь за лед поверхность водяной пленки, образующей пузырь. Знаешь, какой толщины та пленка, на которой мы стоим? В обычных человеческих мерах она равна 5000-й доле сантиметра. Пятьсот таких слоев, наложенные друг на друга, составят вместе один миллиметр.

Я невольно поднял ногу, словно мог этим уменьшить свой вес.

- О, дядя, - воскликнул я, - перестань шутить! Неужели ты говоришь правду?

- Сущую правду. Но не трусь. Эта пленочка для нынешних твоих размеров равна по прочности стальной панцырной плите в 200 метров толщиною. Благодаря микрогену мы уменьшены сейчас в масштабе 1: 100 миллионам. Это значит, что мыльный пузырь, обхват которого в человеческих мерах 40 сантиметров, теперь столь же велик для нас, как земной шар для людей.

- Какой же величины мы сами? - спросил я в отчаянии.

- Рост наш равен 1/60000 доле миллиметра. Нас невозможно разглядеть в сильнейшие микроскопы.

- Но почему не видим мы дома, сада, всех наших, не видим земли, наконец?

- Все это находится за пределами нашего горизонта. Но даже когда Земля и взойдет над горизонтом, ты ничего на ней не различишь, кроме матового сияния: вследствие нашего уменьшения оптические условия настолько изменились, что хотя мы вполне ясно видим все в нашей нынешней обстановке, мы совершенно отрешены от прежнего своего мира, размеры которого в 100 миллионов раз больше. Тебе придется

удовольствоваться тем, что доступно нашему зрению на мыльном пузыре, - этого будет достаточно.

Тем временем мы брели по мыльному пузырю и достигли места, где вокруг нас фонтаном били вверх прозрачные струи. В голове моей пронеслась мысль, от которой кровь застучала в висках… Ведь пузырь может сейчас лопнуть! Что будет, если я окажусь на одной из разбрызганных водяных пылинок, а дядя Вендель со своим микрогеном - на другой? Кто меня тогда разыщет? И что будет со мной, если я на всю жизнь останусь ростом в 1/60000 миллиметра? Кем буду я среди людей? Гулливера среди великанов нельзя и сравнить со мной, потому что никто из людей не мог бы меня даже увидеть. Жена… бедные мои дети!… Кто знает, не вдохнут ли они меня с ближайшим вздохом в свои легкие! И когда они будут оплакивать мое загадочное исчезновение, я буду прозябать в их крови, подобно невидимой бактерии…

- Скорей, дядя, скорей! - завопил я. - Возврати нам человеческий рост. Пузырь должен сейчас лопнуть… Странно, что он еще цел. Как долго мы здесь?

- Пусть это не тревожит тебя, - невозмутимо ответил дядя. - Пузырь сохранит свою целость дольше, чем мы здесь пробудем. Наша мера времени уменьшилась вместе с нами, и то, что ты здесь принимаешь за минуту, составляет по земной оценке лишь стомиллионную ее долю. Если мыльный пузырь витает в воздухе только 10 земных секунд, то при нынешних наших условиях это отвечает целой человеческой жизни. Обитатели же пузыря живут, наверное, еще в сто тысяч раз быстрее, нежели мы теперь.

- Как? На мыльном пузыре обитатели?

- Конечно, и даже довольно культурные. Но время течет для них в десять биллионов раз[2] быстрее человеческого темпа; это значит, что они воспринимают все впечатления и вообще живут в десять биллионов раз стремительнее. Три земных секунды составляют столько же, сколько на мыльном пузыре миллион лет, - если только его обитателям знакомо понятие «год»: ведь наш пузырь не обладает равномерным, достаточно быстрым вращательным движением. Мы находимся на пузыре, который образовался не менее 6-ти секунд тому назад; в течение этих двух миллионов лет могла успеть развиться пышная живая природа и достаточная цивилизация. По крайней мере, это вполне согласуется с моими наблюдениями над другими мыльными пузырями:

всякий раз я обнаруживал на них родственное сходство с матерью-Землею.

- Но эти обитатели… где же они? Здесь видны предметы, которые я готов принять за растения; эти полушаровидные купола могли бы быть городами. Но я не вижу ничего похожего на людей.

- Вполне естественно. Способность наша воспринимать внешний мир, даже ускоренная в сто миллионов раз по сравнению с человеческой, все еще в 100.000 раз медленнее, нежели у «мылоземельцев» (будем так называть обитателей мыльного пузыря). Если сейчас нам кажется, что прошла одна секунда, то они прожили 28 часов[3]. В такой пропорции ускорена здесь вся жизнь. Взгляни-ка на эти растения.

- Действительно, - сказал я, - мне видать, как деревья (эти коралловидные образования, конечно, ничто иное, как деревья) вырастают на наших глазах, цветут и приносят плоды. А вон тот дом словно сам растет из-под земли.

- Его сооружают мылоземельцы. Мы не видим самих работников - движения их слишком быстры для нашей способности восприятия. Но сейчас мы поможем делу. С помощью микрогена я изощрю наше чувство времени еще в 100.000 раз. Вот - понюхай-ка еще раз. Размеры наши останутся те же, я переставил только шкалу времени.

II

Дядя вновь извлек свои трубки. Я понюхал - и тотчас же очутился в городе, окруженный многочисленными, деятельно занятыми существами, имевшими несомненное сходство с людьми. Они казались мне немного прозрачными, что обусловливалось, вероятно, их происхождением из глицерина и мыла. Мы слышали и их голоса, хотя не могли понять их языка. Растения утратили быструю свою изменчивость; мы находились теперь по отношению к ним в тех же условиях восприятия, как и мылоземельцы, или как обыкновенные люди по отношению к земным организмам. То, что представлялось нам раньше струями фонтана, оказалось стеблями быстро растущего

высокого злака.

Обитатели мыльного пузыря также воспринимали нас теперь и забросали нас многочисленными вопросами, обнаруживавшими их несомненную любознательность.

Взаимное понимание налаживалось туго, так как члены их, имевшие некоторое сходство с щупальцами полипов, выполняли настолько странные движения, что даже язык жестов оказывался неприменимым. Тем не менее, мылоземельцы встретили нас дружелюбно; как мы узнали позже, они приняли нас за обитателей другой, еще неисследованной части их собственного шара. Они предложили нам пищу, имевшую сильный щелочный привкус и не особенно нам понравившуюся; со временем мы привыкли к ней, но было очень неприятно, что здесь не имелось настоящих напитков, а одни только кашеобразные супы. На этом мировом теле вообще все имело нежную студнеобразную консистенцию, и удивительно было наблюдать, что даже в этих своеобразных условиях творческая сила природы произвела путем приспособления самые целесообразные создания. Мылоземельцы оказались действительно культурными существами. Пища, дыхание, движение и покой, необходимые потребности всех живых созданий, дали нам первые опорные точки, чтобы понять кое-что из их языка.

Так как они бережно заботились о наших потребностях, а дядя убедил меня, что наше отсутствие из дому не превзойдет границ, совершенно незаметных в земных условиях, то я с удовольствием пользовался случаем изучить этот новый мир. Чередования дней и ночей здесь не было, зато были правильные перерывы в работе, соответствовавшие приблизительно нашему суточному делению времени. Мы усердно занимались изучением мылоземельского языка и успели тщательно исследовать физическое строение мыльного пузыря, а также господствующие здесь общественные отношения. С последнею целью мы предприняли путешествие в столицу, где были представлены главе государства, носившему титул «Владыки мыслящих». Мылоземельцы называли себя «мыслящими» и имели на это право, потому что научная культура стоит у них высоко, и все население принимает живое участие в научных спорах. Мы имели печальный случай близко с этим познакомиться.

Я старательно записывал результаты наших наблюдений и накопил

богатый материал, который собирался по возвращении на землю обработать в виде «Истории культуры мыльного пузыря». К несчастью, я не учел одного обстоятельства. При нашем весьма поспешном вынужденном возвращении к прежним размерам записки мои оказались не при мне и вследствие этой несчастной случайности были недосягаемы для действия микрогена. Теперь же эту неувеличенную рукопись нет возможности отыскать: она витает невидимой пылинкой где-нибудь кругом нас, а с нею вместе - и доказательство моего пребывания на мыльном пузыре…

III

Мы прожили среди мылоземельцев года два, когда спор двух распространенных здесь главных школ обострился до крайности. Утверждения более старой школы об устройстве мира подверглись убийственной критике со стороны выдающегося естествоиспытателя Глагли[4], которого энергично поддерживала более молодая прогрессивная школа. В виду этого Глагли, как принято здесь в подобных случаях, привлечен был к трибуналу «Академии мыслящих», чтобы установить, допустимы ли его теории и открытия с точки зрения государственных интересов и общественного порядка. Противники Глагли опирались главным образом на то, что новые учения противоречат древним незыблемым основным законам «мыслящих». Они требовали поэтому, чтобы Глагли либо отрекся от своих взглядов, либо понес законную кару за лжеучение. В особенности зловредными и еретическими находили следующие три пункта учения Глагли:

Первый. Мир внутри полый, наполнен воздухом, и кора его не превышает 300 локтей. Против этого возражали: если бы земля, на которой обитают «мыслящие», была пуста, она давно бы уже проломилась. Между тем, в книге древнего мудреца Эмзо (это - мылоземельный Аристотель) читаем: «Мир наш сплошной и не разрушится вовеки».

Во-вторых, Глагли утверждал: мир состоит всего из двух первичных элементов - жира и щелочи, которые вообще суть

единственные в мире вещества и существуют извечно; из них механическим путем развился мир; в мире не может быть ничего иного, кроме того, что состоит из жира и щелочи. Воздух есть испарения этих элементов. Этому противопоставлялось утверждение, что элементами являются не одни жир и щелочь, но также глицерин и вода; немыслимо допустить, чтобы они приняли шарообразную форму самопроизвольно; в древнейших же письменных памятниках «мыслящих» читаем: «Мир выдут устами исполина, имя коего Рудипуди».

В-третьих, Глагли учил: мир наш - не единственный: существует бесчисленное множество миров, представляющих собою полые шары из жира и щелочи и свободно парящие в воздухе. На них также живут мыслящие существа. Эти утверждения объявлены были не только ложными, но и опасными для государства, так как если бы существовали другие миры, которых мы не знаем, то на них не распространялась бы власть «Владыки мыслящих». Между тем, основной закон государства гласит: «Каждый, утверждающий, что существует нечто, Владыке мыслящих неподвластное, подлежит кипячению в глицерине до полного размягчения».

Глагли защищался. На заседании он особенно напирал на то, что учение о сплошности мира противоречит утверждению, что он выдут, и спрашивал: на чем же стоял исполин Рудипуди, если других миров не существует? Академики старой школы сами были противниками этого учения, и Глагли отстоял бы перед трибуналом свои первые два тезиса, если бы третий не подрывал его лояльности. Политическая неблагонадежность этого тезиса была очевидна, и даже друзья Глагли не решались выступить по этому пункту в его защиту, так как утверждение, будто существуют другие миры, рассматривалось как противогосударственное и антинациональное. Но так как Глагли не желал отречься от своих взглядов, то большинство академиков было против него, и наиболее рьяные враги его приготовили уже котел с глицерином, чтобы кипятить еретика до размягчения.

Я слушал эти необоснованные доводы за и против, хорошо зная, что нахожусь на пузыре, который секунд шесть тому назад сынишка мой выдул соломинкой у садового окна моего дома. Видя, что в результате столкновений этих вдвойне ложных мнений должно погибнуть благородное мыслящее существо (так как кипячение до размягчения является для мылоземельцев смертельным), я не мог

больше сдерживать себя, поднялся и потребовал слова.

- Не делай глупостей, - шептал, придвигаясь ко мне, дядя Вендель. - Ты себя погубишь. Ничего не поймут, увидишь! Молчи!

Я не поддался и начал:

- Граждане «мыслящие»! Позвольте высказаться гражданину, располагающему достоверными сведениями о происхождении и устройстве вашего мира.

Поднялся всеобщий ропот. «Что! Как! «Вашего» мира? У вас разве другой? Слушайте! Слушайте!… Дикарь, варвар!… Он знает, как возник мир!».

- Как возник мир, не знает никто, ни вы, ни я, - продолжал я, повысив голос. - Потому что все «мыслящие», как и мы оба - лишь ничтожная частица мыслящих существ, рассеянных по различным мирам. Но как возник тот эфемерный клочок мира, на котором мы сейчас находимся, - это я могу вам сказать. Мир ваш действительно полый и наполнен воздухом; кора его не толще, чем указано гражданином Глагли. Она, без сомнения, когда-нибудь лопнет, - но до того времени пройдут еще миллионы ваших лет (громкое «браво» глаглианцев). Верно и то, что существует еще много обитаемых миров, но не все они представляют собою полые шары; нет, это во много миллионов раз более крупные каменные массы, обитаемые такими существами, как я. Жир и щелочь не только не единственные элементы, но и вообще не элементы: это вещества сложные, которые лишь случайно являются преобладающими в вашем крошечном мыльнопузырном шаре…

- Мыльнопузырный мир! - Буря возмущения поднялась со всех сторон.

- Да, - храбро кричал я, не обращая внимания на жесты дяди Венделя. - Да, мир ваш - не более как мыльный пузырь, который выдули на конце соломинки уста моего маленького сына и который в ближайший же момент пальцы ребенка могут раздавить. По сравнению с этим миром ребенок мой, конечно, исполин…

- Неслыханно!… Безумие!… - доносилось до меня со всех сторон, и чернильницы пролетали близ моей головы. - Это сумасшедший! Мир - мыльный пузырь! Сын его выдул мир! Он объявляет себя отцом творца мира. Закидать его камнями! Кипятить, кипятить!…

- Во имя справедливости! - кричал я. - Выслушайте. Заблуждаются

обе стороны. Не мир сотворен моим сыном; он выдул лишь этот шар в пределах мира, выдул по законам, которые господствуют над всеми нами. Он ничего не знает о вас, и вы ничего не можете знать о нашем мире. Я - человек. Я в сто миллионов раз больше вас и в десять биллионов раз старше. Освободите Глагли. Не спорьте по вопросам, которых вы не в состоянии разрешить…

- Долой Глагли!… Долой «людей»! Посмотрим, сможешь ли ты раздавить мир между своими пальцами! Зови же своего сынишку! - раздавалось вокруг, когда меня и Глагли волокли к котлу с кипящим глицерином.

Пышущий жар обдавал меня. Напрасно пытался я защищаться.

- Внутрь его! - кричала толпа. - Посмотрим, кто лопнет раньше…

Горячий пар окружил меня, жгучая боль пронизала все тело и…

Я сидел рядом с дядей Венделем за садовым столом. Мыльный пузырь еще парил на прежнем месте.

- Что это было? - спросил я, изумленный и пораженный.

- Одна стотысячная доля секунды. На земле ничего не изменилось. Я успел вовремя передвинуть шкалу прибора - иначе ты сварился бы в глицерине. Ну что, опубликовать открытие микрогена? Так тебе и поверят! Попробуй-ка, объясни им…

Дядя рассмеялся, и мыльный пузырь лопнул.

Сын мой выдул новый.

Примечания редактора

Относительность пространства и времени

Рассказ «На мыльном пузыре» подводит непосредственно к вопросу об относительности пространства. Фантастический «микроген» обладает способностью уменьшать людей в произвольное число раз. Однако, если бы уменьшились не только оба героя рассказа, их платье и

содержимое их карманов, но также и весь мир, вся вселенная[5], то они не ощутили бы ровно никакой перемены. Путешествие по мыльному пузырю не могло бы состояться по той простой причине, что самый пузырь уменьшился бы во столько же раз и был бы для наших героев так же мал, как и прежде. Вообще все предметы, по сравнению с которыми уменьшенные люди могли бы удостовериться в совершившемся изменении своего роста, также уменьшились бы в соответствующее число раз, и для людей исчезла бы всякая возможность обнаружить уменьшение своих размеров. Каждый желающий может поэтому смело объявить своим согражданам, что он сейчас уменьшил (или увеличил) их вместе со всем миром в миллион раз - и никто не сможет его опровергнуть, никто не сможет доказать ему, что этого не было сделано. Зато и сам он, правда, ничем не сможет удостоверить своего утверждения.

Принято думать, что невозможно обнаружить изменения размеров мира только при том условии, если все три его измерения подверглись соразмерному изменению, т. е. если мир изменил свою величину без искажения; всякое искажение мира - полагают обычно - не может ускользнуть от наших наблюдений. Однако это не так. Если бы, например, мир наш внезапно заменился другим миром, представляющим зеркальное отражение прежнего, - мы, проснувшись в таком мире, ничем не могли бы обнаружить произошедшей перемены. Мы писали бы левой рукой, выводя строки справа налево, наклоняя буквы налево - и вовсе не сознавали бы, что совершаем нечто необычное. Ведь мы различаем и только потому, что связываем правильное начертание с определенным направлением, - запоминаем, например, что полукруг должен быть обращен в правую сторону[6]. Но в новом, «зеркальном» мире место правой руки заняла левая, и потому мы неизбежно будем теперь считать правильным начертание. Короче говоря: отличить мир от симметричного с ним мира, если первый исчез и заменен вторым, - мы не в состоянии.

Более того: мы не заметили бы ни малейшей перемены в мире даже и в том случае, если бы все предметы увеличились (или уменьшились) в разных направлениях в неодинаковое число раз. Если мир изменяется таким образом, что все предметы увеличиваются, например, в

восточном направлении, скажем, в 1000 раз, а в прочих направлениях остаются неизменными, то и такое чудовищное искажение прошло бы для нас совершенно незамеченным. Действительно, как мог бы я убедиться, что стол, за которым я сижу, вытянулся в восточном направлении в 1000 раз? Казалось бы, весьма простым способом: если прежняя его длина в этом направлении была один метр, то теперь она равна 1000 метров. Достаточно, значит, только произвести измерение. Но не забудем, что когда я поверну метровый стержень в восточном направлении, чтобы выполнить это измерение, стержень мой удлинится (как и все предметы мира) в 1000 раз, и длина стола в восточном направлении по-прежнему будет одинакова с длиною стержня; я буду считать ее, на основании проделанного измерения, равной 1 метру. Теперь понятно, почему мы никаким способом не в силах были бы обнаружить, что форма мира подверглась указанному искажению.

Германский математик проф. О. Дзиобек приводит в одной из своих статей еще более удивительные соображения.

«Представим себе зеркало с отражающей поверхностью произвольной кривизны - одно из тех уродующих зеркал, которые выставляются в балаганах для увеселения посетителей, забавляющихся своим карикатурным отражением. Обозначим реальный мир через **А**, а его искаженное изображение через **В**. Если некто стоит в мире **А** у рисовальной доски и чертит на ней линейкой и циркулем линии и фигуры, то уродливый двойник его в **В** занимается тем же делом. Но доска наблюдателя в **А**, на наш взгляд, - плоская, доска же в **В** - изогнутая. Наблюдатель в **А** проводит прямую линию, а отраженный наблюдатель в **В** - кривую (т. е. представляющуюся нам кривой). Когда в **А** чертится полный круг, то в **В** выполняется то же самое, но замкнутая линия мира **В** кажется нам не окружностью, а некоторой сложной кривой, быть может, даже двоякой кривизны. Когда наблюдатель в мире **А** берет в руки прямой масштаб с нанесенными на нем равными делениями, то в руках его двойника оказывается тот же масштаб, но для нас он не прямой, а изогнутый и при том с неравными делениями.

Допустим теперь, что **В** - не зеркальное отражение, а реально существующий объект. Каким образом мог бы наблюдатель мира **В** узнать, что его мир и собственное его тело искажены, если искажение одинаково захватывает все измерения, всю обстановку? Никаким. Более

того: наблюдатель в **B** будет думать о мире **A** то же, что наблюдатель в **A** думает о мире **B**; он будет убежден, что мир **A** искажен. Свои линии он будет считать прямыми, а наши - искривленными, свою чертежную доску плоской, а нашу - изогнутой, свои масштабные деления равными, а наши - неравными. Между обоими наблюдателями и их мирами - полная взаимность. Когда наблюдатель в **A**, любуясь формами «своей» статуи Аполлона, взглянет на искаженное изваяние в мире **B**, он найдет его, конечно, безобразно изуродованным. Гармония форм исчезнет бесследно: руки чересчур длинны и тонки, и т. п. Но что сказал бы наблюдатель из мира **B**? Его Аполлон представился бы ему таким же совершенным, каким представляется нам наш; он будет превозносить его красоту и гармонию форм, а нашего Аполлона подвергнет уничтожающей критике: никакой пропорциональности, руки - бесформенные обрубки, и т. п.

Если предмет перед искажающей зеркальной поверхностью меняет свое положение - приближается, удаляется, отходит влево или вправо, - то изменяется и характер искажения. Искажения могут зависеть и от времени, если допустить, что кривизна отражающей поверхности непрестанно изменяется, порою исчезая вовсе (зеркало становится тогда плоским).

Отбросим теперь зеркало, которым мы пользовались только ради наглядности, и обобщим сказанное:

Если бы вся окружающая нас вселенная претерпела любое искажение, зависящее от места и времени, при условии, что искажение распространяется на все твердые тела, в частности на все измерительные инструменты и на наше тело, - то не было бы никакой возможности это искажение обнаружить».

*** * ***

Микроген Лассвица обладает способностью изменять не только пространственные размеры, но и быстроту течения времени. И здесь следует отметить, что изменение темпа времени в любое число раз не может быть никакими средствами обнаружено, если оно

распространяется на все явления, совершающиеся во вселенной (или в ее изолированной части, за пределы которой наблюдатель не может проникнуть). Это станет понятнее, если напомним, что единственным мерилом времени являются для нас пространственные промежутки на измерителе времени - на часовом циферблате, на звездном небе, и т. п. У нас нет никакой возможности убедиться, действительно ли часы идут равномерно, или Земля вращается равномерно, - как мы всегда допускаем. «Если бы сутки и их подразделения - часы, минуты, секунды - были неравномерны, если бы ход наших часов во времени менялся, если бы менялась и скорость вращения Земли вокруг оси и обращения вокруг Солнца, а также скорость обращения Луны вокруг Земли, если бы тому же закону изменяемости подвержены были и всякие иные мерила для времени, - мы не были бы в состоянии обнаружить этой изменяемости, и все осталось бы для нас по-старому» (Дзиобек). Не заметили бы мы никакой перемены в мире даже и в том случае, если бы «в некоторый момент все часы согласно остановились и прекратились все движения, все изменения в окружающем нас мире, а по истечении определенного промежутка времени все ожило бы вновь, продолжало двигаться и жить, - словно в сказке об окаменелом царстве, где с наивной смелостью предвосхищено то, что мы называем относительностью нашего мерила времени».

Мы видим, что мир вовсе не должен быть в действительности так неизменен, как думает большинство людей, полагаясь на привычные представления и на показания наших чувств. Напротив, мир может ежесекундно претерпевать самые фантастические изменения: уменьшаться или увеличиваться в любое число раз, «выворачиваться наизнанку» (т. е. заменяться симметричным ему миром), искажать всячески свою форму, вырастая в одних направлениях и сокращаясь в других, искривляться на всевозможные лады, может ускорять или замедлять темп событий, порою останавливая их вовсе - и никто из нас не в состоянии был бы обнаружить ни следа этих изменений. Волшебный микроген, о котором мечтал Лассвиц, даже несравненно более чудодейственный по своей силе, мог бы быть давно уже изобретен и совершать над нами свои парадоксальные метаморфозы - и никто из нас об этом не подозревал бы. Таковы следствия, неизбежно вытекающие из относительности пространства и времени[7].

Машина времени

Извлечение из повести Г. Уэллса [8]

I. ВВЕДЕНИЕ

Путешественник во времени (вполне подходящее для него название) объяснял нам малодоступные пониманию вопросы. Его серые глаза блестели и мерцали; лицо, обыкновенно бледное, разгорелось от оживления. Мы же лениво восхищались серьезностью, с которой он выяснил свой новый парадокс (каковым мы в это время считали его идею), восхищались также и плодовитостью ума этого человека. Вот что он говорил:

- Вы должны внимательно следить за моими словами, потому что я постараюсь опровергнуть несколько общепринятых идей. Я утверждаю, например, что та геометрия, которой нас учили в школе, основана на неправильных представлениях.

- Вы, кажется, хотите начать со слишком трудного для нас вопроса, - сказал Фильби, известный спорщик.

- Я совсем не требую, чтобы вы принимали мои слова на веру, без всякого обоснования. Но вы скоро согласитесь с частью моих положений, а это все, чего я требую. Вам, конечно, известно, что математической линии, линии без малейшей толщины, реально не существует. То же самое можно сказать и относительно математической плоскости. То и другое - отвлеченности.

- Правильно, - подтвердил психолог.

- Точно также куб, имеющий только длину, ширину и толщину, не может существовать реально.

- Против этого я возражаю, - сказал Фильби. - Твердое тело, конечно, существует.

- Так думает большинство. Но может ли существовать «мгновенный» куб?

- Я вас не понимаю, - сказал Фильби.

- Можно ли говорить о реальном бытии куба, который на самом деле не существовал ни малейшего промежутка времени?

Фильби задумался.

- Ясно, - продолжает Путешественник, - что каждое реальное тело должно иметь протяжение в четырех измерениях, то есть обладать длиной, шириной, толщиной и продолжительностью существования. Существует четыре измерения: три мы называем измерениями пространства, четвертое - времени. Но люди совершенно неправильно склонны считать четвертое измерение чем-то существенно отличным от трех остальных. Это происходит потому, что наше сознание в течение всей жизни, от ее начала до конца, движется в одном направлении, вдоль времени. Люди совершенно упускают из виду упомянутый факт; между тем это-то и есть четвертое измерение, хотя многие толкуют о нем, совсем не зная, о чем они говорят. В сущности, я указываю вам только новый взгляд на время. Существует всего одно различие между временем и каким-либо другим из трех измерений пространства; вот оно: наше сознание движется вдоль времени. Но многие трактуют эту идею совершенно неправильно. Вы все слыхали, что говорят о четвертом измерении?

Пространство, по мнению наших математиков, имеет три измерения. Между тем, некоторые философски настроенные люди спрашивали, почему всегда говорят только о трех измерениях; почему не может существовать другого направления под прямыми углами к остальным трем? Ученые пытались даже создать геометрию четвертого измерения. Вы все знаете, что на плоской поверхности, имеющей всего два измерения, легко изобразить предмет с тремя измерениями; упомянутые же ученые полагают, что с помощью трех измерений они могли бы построить модель четырехмерную, если бы только овладели надлежащей перспективой.

Некоторое время я тоже работал над вопросом о геометрии

четвертого измерения. Я достиг даже некоторых поразительных результатов. Например, вот портрет человека, сделанный, когда ему было восемь лет; другой, когда ему минуло пятнадцать; третий - в семнадцатилетнем возрасте, и так далее. Все это, очевидно, отдельные трехмерные представления его существования в пределах четвертого измерения. Вот перед вами общеизвестная научная диаграмма - запись погоды. Линия, которую я показываю пальцем, изображает колебания барометра; вчера он стоял вот на этой высоте, к ночи упал; сегодня утром опять поднялся и постепенно дошел до сих пор. Без сомнения, ртуть не наметила этой линии в каком-либо из общепринятых измерений пространства. Но она несомненно эту линию создала; следовательно, линия эта находится в четвертом измерении.

- Но, - сказал врач, - если время действительно только четвертое измерение пространства, то почему же его всегда считали чем-то совершенно иным? И почему мы не можем совершать перемещений во времени, как в других измерениях пространства?

Путешественник усмехнулся.

- А вы вполне уверены, что мы можем без помех двигаться в пространстве? Правда, мы довольно свободно перемещаемся вправо и влево, назад и вперед; а что скажете вы относительно движения вверх и вниз? Земное притяжение ставит нам в этом большие препоны.

- Не вполне, - сказал врач. - А воздушные шары?

- Ну, а до их появления человек не мог свободно двигаться в вертикальном направлении, если не считать судорожных подпрыгиваний да карабканья на возвышенности.

- А все-таки люди могут немного двигаться и вверх, и вниз, - заметил врач. - Во времени же вы совсем не можете перемещаться, не в состоянии уйти от настоящего мгновения.

- В этом отношении вы очень ошибаетесь, как ошибался и ошибается весь мир. Мы постоянно отдаляемся от настоящего мгновения. Наша духовная, лишенная всяких измерений жизнь проходит вдоль времени с равномерной быстротой, начиная с колыбели до могилы.

- Но существует одно очень большое затруднение, - прервал Путешественника психолог. - Человек может произвольно двигаться во всех направлениях пространства, во времени же - нет.

- Вот это-то и составляет ядро моего великого открытия. Впрочем,

вы ошибаетесь, говоря, что мы не в силах двигаться во времени. Возьмем следующий пример. Я очень живо вспоминаю какой-нибудь случай и таким образом как бы возвращаюсь к мгновению, в которое он произошел. Как часто мы слышим выражение: «я делаю прыжок в прошлое». Конечно, у нас нет средств оставаться в этом прошлом в течение продолжительного времени; но точно также и дикарь или животное не в силах сколько-нибудь времени продержаться на высоте шести футов от земли. В этом отношении человек цивилизованный имеет преимущество. С помощью аэростата он превозмогает силу тяготения. Почему же не смеет он надеяться, что, в конце концов, ему удастся останавливать или ускорять свое движение во времени или даже обращаться вспять, путешествовать в противоположном направлении? Уже давно рисовалась мне идея машины, которая могла бы, по воле машиниста, двигаться во всех направлениях пространства и времени.

Фильби едва удерживался от смеха.

- Я проверял это опытом, - заметил Путешественник.

- Проверяли опытом? - сказал я.

Путешественник, улыбаясь, обвел нас взглядом, потом медленно вышел из комнаты. Психолог взглянул на нас:

- Интересно, что там у него?

- Какой-нибудь аппарат для фокусов, - предположил врач, а Фильби стал было рассказывать нам об одном фокуснике, но не успел окончить. В комнату вернулся Путешественник.

II. МАШИНА

Путешественник держал в руке блестящий металлический прибор, чуть-чуть побольше небольших часов, очень тонкой работы. Некоторые его части были из слоновой кости; я заметил на нем также какое-то прозрачное кристаллическое вещество.

Мы все насторожились. Мне кажется невероятным, чтобы фокус, хотя бы ловко и тонко задуманный и выполненный необыкновенно искусно, мог обмануть нас при таких условиях.

- Эта штучка, - начал Путешественник, - только модель машины

для путешествия во времени. Заметьте, какой у нее необыкновенный вид; взгляните также, как странно мерцает вот эта пластинка; не правда ли, она кажется не вполне реальной? - Он указал пальцем на одну из частей машинки. - Видите, вот здесь один маленький беленький рычаг, а вот другой.

Врач поднялся со своего кресла и наклонился над моделью.

- Она превосходно сделана, - одобрил он.

- Теперь запомните следующее; если я надавлю на этот рычаг, машина двинется в будущее; надавлю на другой, она начнет скользить в противоположном направлении. Вот это седло для путешественника. Сейчас я нажму первый рычаг, и машина понесется. Она перейдет в будущее, скроется. Смотрите на нее пристально. Осмотрите также стол, и сами удостоверьтесь, что тут нет никакого обмана и фокуса.

Повернувшись к психологу, он взял его за палец и попросил нажать на рычаг. Мы все видели, как наклонился рычаг. Почувствовалось дыхание ветра; маленькая машина внезапно качнулась, повернулась, стала неясной; с секунду казалась каким-то призраком, превратилась в слабое мерцание меди и слоновой кости, промелькнула, исчезла… На столе не осталось ничего, кроме лампы.

Широко раскрытыми глазами мы смотрели друг на друга.

- Послушайте, - сказал врач, - неужели вы действительно верите, что машина отправилась странствовать во времени?

- Конечно, - ответил Путешественник. - Скажу вам больше: у меня там (он показал в сторону лаборатории) стоит большая, почти оконченная машина, и, собрав все ее части, я отправляюсь в путешествие сам.

- Вы хотите сказать, что ваша модель отправилась в будущее? - спросил Фильби.

- В будущее или прошедшее; я сам хорошенько не знаю, куда именно.

Через короткое время психолога, по-видимому, посетило вдохновение; он сказал:

- Если машина отправилась куда-нибудь, то, конечно, в прошедшее.

- Почему? - спросил Путешественник.

- Видите ли, мы предполагаем, что в пространстве модель не двигалась; следовательно, если бы она отправилась в будущее, она в данный момент была бы здесь; ведь она должна была бы пройти через

настоящее.

- Но, - заметил я, - если бы она ускользнула в прошедшее, мы видели бы ее, входя сегодня в эту комнату, а также в предыдущий четверг, в четверг две недели тому назад, и т. д.

Путешественник повернулся к психологу. - Вы человек мыслящий. Вы ведь понимаете, почему машина сейчас недоступна восприятию наших органов внешних чувств.

- Понятно, - согласился с ним психолог. - Мы не можем видеть этой находящейся в движении модели, как не могли бы различить отдельно одну из спиц вращающегося колеса или разглядеть летящую пулю. Если машина движется во времени в пятьдесят или сто раз скорее, нежели мы сами, если она проносится через минуту, как мы проходим через секунду, то впечатление, производимое ею на наше зрение, должно равняться одной пятидесятой или сотой доле того, которое она произвела бы на него, оставаясь неподвижной во времени. Это вполне понятно.

- А не хотите ли вы взглянуть на самую машину времени? - предложил Путешественник.

Он взял со стола лампу и повел нас в свою лабораторию. В лаборатории мы увидели большую копию исчезнувшего аппарата. Кроме никелевых и костяных частей в машине были стержни и другие части механизма, несомненно выпиленные из горного хрусталя. В общем аппарат казался совсем готовым, только подле чертежей, на скамье, лежали какие-то бруски. Мне хотелось узнать, что это такое, и я поднял один из них. Кварц.

- На этой машине, - высоко поднимая лампу, объявил Путешественник, - я надеюсь совершить экскурсию в области времени.

III. ПУТЕШЕСТВЕННИК ВО ВРЕМЕНИ ВОЗВРАЩАЕТСЯ

В течение недели между двумя четвергами мы почти не упоминали о путешествиях во времени, хотя многие из нас, конечно, думали о тех необычайных результатах, к которым повели бы странствия во времени; думали о видимой правдоподобности этих путешествий и об их

практической невероятности.

В следующий четверг я опять отправился в Ричмонд. Приехал я поздно, когда все остальные уже собрались в гостиной. Врач стоял подле камина. В одной руке он держал листок бумаги, в другой - часы. Я обвел глазами комнату, ища Путешественника.

- Половина восьмого, - сказал врач. - Не сесть ли обедать?

- А где же?… - спросил я.

- Ну, его, очевидно, где-то задержали. В этой записке он просит вас всех к столу, если к семи его не будет. По возвращении он обещает объяснить все.

Во время обеда толковали о том, где мог быть хозяин, и я высказал предположение, что он отправился в странствования во времени. Издатель попросил объяснить ему, о чем я говорю, и психолог начал тяжеловесно и неуклюже рассказывать «об остроумном парадоксе и фокусе», который мы видели на прошлой неделе. Он с увлечением толковал об этом, когда дверь из коридора приоткрылась, и мы увидели Путешественника во времени.

- Что с вами? - спросил врач.

Удивительный вид был у Путешественника. Его платье покрывали пыль и грязь, на рукавах виднелись зеленые пятна, волосы пришли в полный беспорядок; и мне показалось, что они поседели больше прежнего. Лицо Путешественника было смертельно бледно; через его подбородок шел коричневый рубец, полузаживший порез. Его обтянувшееся лицо выражало растерянность и страдание. Мгновение он колебался, стоя на пороге, точно ослепленный светом; потом вошел в комнату, прихрамывая, с трудом подошел к столу и потянулся к бутылке вина. Издатель налил в стакан шампанского и подвинул его Путешественнику. Тот выпил вина, и это, по-видимому, его оживило.

- Не обращайте на меня внимания, - сказал он с легкими запинками. - Я вполне здоров. - Он протянул свой стакан, чтобы ему налили еще вина, и залпом осушил его.

- Я пойду умоюсь и переоденусь; после этого вернусь к вам и объясню все…

Он поставил свой стакан на стол и направился к двери на лестницу.

- В чем дело? - сказал журналист. - Разыгрывал он вора-любителя, что ли?

- Я вполне уверен, что все это дело машины времени, - ответил я.

Издатель возражал.

- Что такое странствие во времени? - говорил он. - Разве может человек покрыться пылью, валяясь в парадоксе?

В столовую вошел Путешественник. Он был во фраке, и только его изможденный и растерянный вид говорил о той перемене, которая меня так поразила.

Путешественник молча подошел к своему месту, улыбнулся и спросил:

- Где баранина? Что за наслаждение опять воткнуть вилку в мясо!

- Только одно слово, - спросил я. - Вы путешествовали во времени?

- Да, - ответил Путешественник и с полным ртом кивнул головой.

Наконец, Путешественник во времени отодвинул от себя тарелку и обвел нас взглядом.

- Полагаю, мне следует извиниться, - сказал он. - Но, право же, я умирал от голода. Я пережил удивительные приключения. Перейдемте в курительную. Моя история будет длинна. Только, пожалуйста, не перебивайте меня. Мне хочется высказаться. Большая часть этого рассказа покажется вымыслом. Пусть. В четыре часа я был в моей лаборатории, потом… потом… Я прожил неделю… такую неделю, какой не переживал ни один человек. Я измучен, но не засну, пока не расскажу вам обо всем.

Путешественник во времени начал свой рассказ. Почти все мы, слушатели, сидели в тени, потому что свечей не зажгли. Сначала мы переглядывались, но через несколько времени перестали делать это и смотрели только на лицо Путешественника.

IV. РАССКАЗ ПУТЕШЕСТВЕННИКА

В прошедший четверг я изложил некоторым из вас принципы машины времени, показал и ее самое, хотя и недоконченную, в моей мастерской. Аппарат был готов только сегодня утром. Ровно в десять часов первая из машин времени начала действовать. Я попробовал все ее винты, налил еще одну каплю масла на стержень из кварца и сел в седло. Вероятно, самоубийца, приставивший к своему черепу дуло

револьвера, совершенно так же спрашивает себя, что будет с ним, как я в ту минуту. Одной рукой я взял рычаг движения, другой - рычаг, задерживающий ход, нажал на первый и почти тотчас же на второй. Мне показалось, что я шатаюсь; я почувствовал затем кошмарное ощущение падения, огляделся и увидел лабораторию в ее обычном виде. Случилось ли что-нибудь? Мгновение я подозревал, что моя теория меня обманула, потом заметил часы. Как мне казалось, за секунду перед тем их стрелки показывали одну минуту одиннадцатого, теперь же я увидел на циферблате половину четвертого.

Я глубоко вздохнул, стиснул зубы; обеими руками сжал рычаг движения и двинулся. Глухой шум. Лаборатория наполнилась дымкой. В комнату вошла миссис Уатчет и, по-видимому, не замечая меня, направилась к двери в сад. Вероятно, на то, чтобы пройти через комнату, она затратила около минуты, мне же показалось, будто моя экономка пронеслась, как ракета. Я отвел рычаг до самого предела. Наступила ночь, стемнело так быстро, точно потушили лампы. Через мгновение рассвело следующее утро. Лаборатория сделалась неясной, призрачной. Пришла следующая черная ночь, потом опять день, опять ночь, опять день и т. д.; они мелькали все быстрее и быстрее.

Вряд ли я смогу передать странные ощущения путешествия во времени. Кажется, будто скользишь по наклонной плоскости, беспомощно летишь куда-то с невероятной быстротой. И я ежесекундно с ужасом ждал, что мне предстоит разбиться. Ночь сменяла день с такой быстротой, точно надо мной веяло черное крыло. Солнце двигалось через небо, каждую минуту делая прыжок; а каждая такая минута обозначала день. Вот мне показалось, что лаборатория разрушена, что я очутился на открытом воздухе и куда-то поднимаюсь; однако я двигался слишком быстро, чтобы заметить какие-либо другие движущиеся предметы. Глаза мои страдали от мерцающей смены темноты и света. В промежутках тьмы я видел, как луна меняла свои фазы от серпа до полнолуния. Я несся все с большей скоростью; наконец, трепетание ночи и дня слилось в сплошную серую тень; небо приняло изумительно глубокий синий тон, - великолепный лучезарный оттенок раннего рассвета; прыгающее солнце превратилось в огненную полосу, в блестящую арку, перекинутую в пространстве, луна - в менее ярко колеблющуюся световую ленту; звезды я перестал видеть; только время от времени на лазури обозначался яркий круг.

Окружавший меня пейзаж был неопределенным, туманным. Я все еще оставался на том холме, на котором теперь стоит этот дом. Я видел, как вырастали деревья, как они изменялись, точно клубы пара; делались то коричневыми, то зелеными; увеличивались, расширялись, трепетали и исчезали. Я видел, как поднимались слабо очерченные величавые и прекрасные строения и как они исчезали, точно грезы. Поверхность земли изменялась, она как бы таяла и утекала на моих глазах. Маленькие стрелки циферблатов, которые отмечали скорость движения моей машины, все быстрее и быстрее бегали кругом. Я заметил, что солнечная полоса колыхалась вверх и вниз, от одного солнцестояния до другого, и что это совершалось в течение одной минуты или меньше; в одну минуту я пролетал через год. Ежеминутно изменялся также вид земли: то ее окутывал снег, то она одевалась кратковременной яркой весенней зеленью. Во мне зашевелились новые чувства - некоторое любопытство, а вместе страх; еще немного, и они совершенно подчинили меня себе. Мне думалось: какое странное развитие человечества, какие удивительные успехи нашей зачаточной цивилизации увижу я, если пристальнее всмотрюсь в смутный, ускользающий мир, который мчится и колеблется перед моими глазами? И я решил остановиться. Я нажал рычаг; машина мгновенно опрокинулась, и я полетел куда-то…

Раздался раскат грома и на мгновение оглушил меня. Свистел жестокий град; окруженный серой пеленой непогоды, я сидел на траве возле опрокинутой машины. Через несколько времени я перестал слышать смутный шум и огляделся кругом. Я был, как казалось, на небольшом садовом лужке.

[Конец этой главы и следующие десять глав посвящены описанию приключений Путешественника в обстановке отдаленнейшего будущего. Эпизоды эти здесь опущены, так как они не затрагивают математической основы повести.]

XV. ПУТЕШЕСТВЕННИК ВОЗВРАЩЕТСЯ

Я помчался обратно. Снова началась мерцающая смена дней и

ночей. Колеблющиеся абрисы земли изменялись, уплывали. Стрелки бегали по циферблатам в обратную сторону. Наконец, я снова увидел неясные тени зданий, признаки жизни пришедшего в упадок человечества. Это тоже миновало: явились другие очертания. Когда стрелка циферблата, указывающего миллионы дней, дошла до нуля, я замедлил движение машины и различил знакомые мне мелкие произведения нашей архитектуры; тысячная стрелка побежала к своей исходной точке; ночи все медленнее и медленнее сменяли дни. Наконец, я очутился между привычными стенами моей лаборатории. Осторожно, не спеша, очень постепенно остановил я ход моего аппарата.

Между прочим, случилась одна вещь, которая удивила меня. Помните, я говорил вам, что в самом начале моего путешествия, раньше, чем машина времени понеслась с огромной скоростью, через лабораторию прошла миссис Уатчет, как мне тогда показалось, промелькнувшая мимо меня с мгновенностью ракеты. На возвратном пути мой аппарат, понятно, опять пронес меня через ту же минуту; я снова увидел мою экономку, и все ее движения повторились, но в противоположном направлении. Дверь из сада отворилась; миссис Уатчет спокойно скользнула через комнату, спиной вперед, и исчезла за той дверью, через которую она тогда вошла.

Машина остановилась. Я был в моей давно знакомой мне лаборатории. Мои инструменты, мои приборы, все я нашел в том виде, в каком оставил. Я спустился с седла совершенно разбитый и сел на скамейку. Я услышал ваши голоса, звон посуды и, уловив обонянием запах мяса, открыл дверь в столовую. Остальное вы знаете. Я умылся, пообедал, а теперь рассказываю вам о моих странствиях.

XVI. ПОСЛЕ РАССКАЗА

Почти всю ночь я не спал, раздумывая о слышанном, и на следующий день решился повидаться с Путешественником во времени. Когда я пришел к нему, мне сказали, что он в лаборатории, и я отправился туда же. Однако лаборатория оказалась пустой. Я посмотрел на машину времени и даже потрогал один из рычагов. Я вернулся в

курильную; там меня встретил Путешественник, который, видимо, собрался куда-то. В одной руке он держал маленькую фотографическую камеру, в другой - дорожную сумку. Завидев меня, Путешественник засмеялся и для рукопожатия подал мне локоть.

- Я страшно занят, - сказал он, - знаете, опять той вещью… там.

- Вы действительно путешествовали во времени?

- Действительно и реально, - был его ответ. Он посмотрел мне в глаза ясным правдивым взглядом. Несколько мгновений Путешественник колебался, обводя комнату глазами, наконец прибавил:

- Дайте мне только полчаса времени. На столе несколько журналов; займитесь ими. Если вы останетесь позавтракать со мной, я окончательно рассею ваше сомнение относительно моих странствий. А теперь позвольте мне покинуть вас на короткое время.

Я согласился, не вполне, впрочем, понимая, о чем он говорит. Путешественник же, кивнув мне головой, ушел по коридору в свою лабораторию. Я слышал, как за ним закрылась дверь; сев в кресло, я взял газету. Что собирался он сделать до завтрака? Случайно на глаза мне попалось одно объявление и напомнило, что я обещался в два часа побывать у издателя Ричардсона; посмотрев же на часы, я понял, что у меня на это осталось мало времени, а потому поднялся с места и пошел по коридору; я собирался сказать Путешественнику, что мне не придется завтракать у него.

В ту минуту, когда я взялся за ручку двери в лабораторию, прозвучало странно оборвавшееся восклицание; послышался звон и стук. Через растворенную дверь на меня хлынул порыв воздуха; в ту же секунду я услыхал звон разбитого стекла, осколки которого сыпались на пол. Путешественника в комнате не было. Передо мною на мгновение мелькнула призрачная сидячая человеческая фигура, еле различимая в хаосе вращающейся черной тени и отблесков меди, - фигура такая прозрачная, что сквозь нее отлично была видна скамейка, заваленная листами чертежей. Через мгновение все пропало. Едва я протер глаза, призрак как бы растаял. Машина времени исчезла. Я был поражен. Я понимал, что произошло нечто необыкновенное, но не мог сообразить, что именно. Я стоял, как окаменелый, широко открыв глаза; в эту минуту садовая дверь открылась и в лабораторию вошел лакей Путешественника.

Мы посмотрели друг на друга, и мало-помалу мои мысли начали

приходить в порядок.

- Скажите, он прошел через эту дверь? - спросил я.

- Нет, в сад никто не прошел. Я думал, что застану его здесь, - был ответ.

Я все понял. Я остался ждать Путешественника, а также и второго, может быть, еще более удивительного рассказа. Но я начинаю бояться, что мне придется ждать всю жизнь.

Путешественник во времени исчез три года тому назад и, как все теперь знают, не вернулся.

Примечание редактора

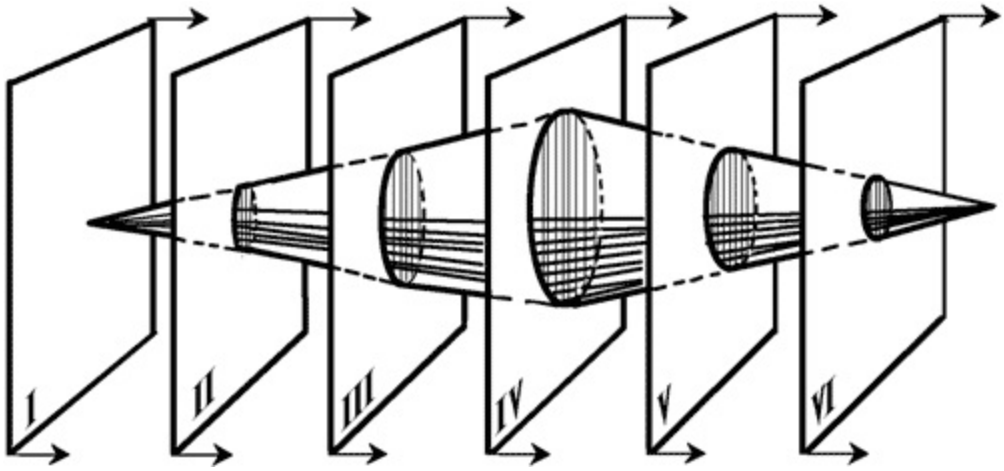
ВРЕМЯ КАК ЧЕТВЕРТОЕ ИЗМЕРЕНИЕ

Полезно остановиться подробнее на высказанном Уэллсом своеобразном понимании в р е м е н и как четвертого измерения пространства.

Чтобы уяснить себе это, перенесемся мысленно из знакомого нам мира трех измерений в мир двух измерений. Таким двухмерным миром, имеющим длину и ширину, но вовсе не имеющим толщины, является плоскость. Вообразим же себе, что весь пространственный мир сплющился в одну плоскость и что в таком мире обитают разумные существа, - конечно, также двухмерные. Для двухмерных обитателей существуют только двухмерные вещи. Всякая линия, пересекающая их плоский мир, должна представляться им в виде точки, так как они могут из всей линии воспринять только одну точку - именно ту, в которой эта линия встречает плоскость. Двухмерные существа могли бы исследовать всю эту линию только в том случае, если бы их плоский мир двигался в третьем измерении, - например, по перпендикулярному направлению. Наделим этот мир таким движением. Следя тогда за тем, как изменяется положение точки встречи линии с их плоскостью,

двухмерные мыслители могли бы составить себе некоторое понятие о всей трехмерной линии. Но, конечно, они не могли бы так наглядно, как мы, представить себе, какое положение занимает в трехмерном мире эта линия: все трехмерное не укладывается в сознании существа двухмерного. Двухмерный мыслитель высказался бы об этом в других выражениях: он сказал бы, что исследуемая им точка изменяет свое положение во «времени». То, что для нас является движением двухмерного мира (плоскости) в трехмерном пространстве, то для обитателя двухмерного мира представлялось бы, как «течение времени». То, что для нас существует одновременно в пространстве трех измерений, - для них появляется последовательно в пространстве двух измерений.

Рассмотрим еще пример. Двухмерный мир (плоскость), двигаясь в трехмерном пространстве, наткнулся на тело в форме двойного конуса (см. рис.). Двухмерный обитатель плоскости, конечно, не может воспринять этот конус как тело; не может даже и вообразить его себе.



Что же будет он видеть и думать, когда мир его наткнется на подобное трехмерное тело и оно пройдет сквозь плоский мир? Проследим за этим. Сначала в двухмерном мире появится точка - вершина конуса. Затем, по мере дальнейшего продвижения плоского мира в направлении третьего измерения (т. е. «с течением времени», как сказал бы двухмерный мыслитель), точка превратится в небольшой кружок или эллипс - сечение конуса плоскостью двухмерного мира. Кружок будет расти, расширяться и, достигнув наибольшего размера, станет сокращаться, постепенно превратится в точку и вновь исчезнет. Двухмерный исследователь наблюдал историю зарождения, развития, увядания и исчезновения «кружка», между тем как мы, существа

трехмерные, воспринимаем ту же вещь сразу, одновременно в форме трех измерений. Для них он существовал в цепи последовательно воспринимаемых плоских сечений, для нас - весь целиком, как трехмерное тело. Движение плоскости в третьем измерении знакомого нам пространства переживается двухмерным существом как течение времени. Для него «прошедшее» конуса - это те его части, которые лежат по одну сторону его плоского мира (по ту, откуда плоскость движется); «будущее» конуса - те его части, которые расположены по другую сторону, а «настоящее» - пересечение конуса с двухмерным миром.

Приложим теперь те же рассуждения к миру трехмерному. Когда мы описываем историю изменений какой-нибудь вещи в нашем трехмерном пространстве, не даем ли мы последовательные изображения этой вещи во времени? Если так, то можно рассматривать время как четвертое измерение мира, измерение, в котором движется наш трехмерный мир; каждое явление, наблюдаемое в трехмерном мире - есть одно из последовательных «пересечений» нашего трехмерного мира с четырехмерною вещью. Существо четырех измерений могло бы сразу охватить всю историю вещи, всю ее «жизнь» в виде некоторого четырехмерного объекта, недоступного нашему воображению.

Само собою разумеется, что фантастическая мысль Уэллса - придумать механизм для произвольного движения в четвертом измерении - не свободна от внутренних противоречий и должна быть принимаема не иначе как чисто художественный прием, удобный для успешного развития интриги фантастической повести.

На комете

Жюля Верна[9]

Однажды - 27 июня - профессор Розетт бомбой влетел в общую залу, где собрались капитан Сервадак, лейтенант Прокофьев, Тимашев и ординарец Бен-Зуф.

- Лейтенант Прокофьев, - крикнул он, - отвечайте без обиняков и лишних разговоров на вопрос, который я вам задам.

- Я и не имею обыкновения… - начал было лейтенант.

- И отлично! - перебил профессор, обращавшийся с лейтенантом, как учитель с учеником. - Отвечайте: вы объехали на вашей шхуне «Добрыне» кругом Галлии почти по экватору, иначе говоря - по ее большому кругу. Да или нет?

- Да, - ответил лейтенант, которому Тимашев подал знак не противоречить раздраженному ученому.

- Хорошо. А измерили вы при этом путь, пройденный шхуной «Добрыней»?

- Приблизительно, т. е. с помощью лага[10] и буссоли[11], но не измеряя высоты солнца и звезд, которую невозможно было определить,

- И что же вы узнали?

- Что окружность Галлии составляет около 2.323[12] километров, а следовательно, ее диаметр равен 740 километрам.

- Да, - сказал профессор, словно про себя, - диаметр в 17 раз меньшеземногодиаметра, равного 12.735[13] километрам.

Сервадак и его спутники смотрели на ученого, не понимая, куда он ведет.

- Так вот, - сказал профессор, - для завершения моего изучения Галлии мне остается определить ее поверхность, объем, массу, плотность и напряжение тяжести на ней.

- Что касается поверхности и объема, - ответил Прокофьев, - то раз мы знаем диаметр Галлии, нет ничего легче, как определить их.

- А я говорю разве, что это трудно? - воскликнул профессор. - Ученик Сервадак, возьмите перо. Зная длину большого круга Галлии, определите величину ее поверхности.

- Вот, - ответил Сервадак, решивший держаться примерным учеником. - Множим окружность 2.323 километра на диаметр, т. е. на 740.

- Скорее же, - торопил профессор, - пора бы уже иметь результат. Ну!

- Так вот, - ответил Сервадак, - я получил в произведении 1.719.020 квадратных километров. Это и есть поверхность Галлии.

- Ну, - продолжал профессор, разгорячаясь, - а теперь, каков же объем Галлии?

- Объем… - замялся Сервадак.

- Ученик Сервадак, неужели вы не можете вычислить объем шара, раз вам известна его поверхность?

- Но, профессор, вы не даете мне времени вздохнуть…

- При вычислениях не дышат, сударь, не дышат!

Слушатели с большим трудом удерживались от смеха.

- Мы когда-нибудь кончим с этим? - спросил профессор - Объем шара равен…

- Произведению поверхности на…

- На треть радиуса, сударь, на треть радиуса! - гремел профессор. - Кончили?

- Почти. Треть радиуса Галлии равна 123,33.

- Ну?

- Произведение 1.719.020 на 123,33 составляет 212.006.737 кубических километров.

- Итак, - сказал профессор, - мы знаем теперь диаметр, окружность,

поверхность и объем Галлии. Это уже нечто, но еще не все. Я намерен определить ее массу, плотность и напряжение тяжести на ее поверхности.

- Это будет трудно, - сказал Тимашев.

- Все равно. Я желаю знать, сколько весит моя комета, и узнаю это!

- Задача не легкая, - заметил лейтенант Прокофьев. - Ведь нам неизвестен состав вещества Галлии.

- Вам неизвестен ее состав? - спросил профессор.

- Неизвестен, - сказал Тимашев, - и если вы нам поможете…

- Пустяки, - заметил ученый, - я решу свою задачу и без этого.

- Мы всегда к вашим услугам, - сказал капитан Сервадак.

*** * ***

62-го галлийского апреля[14] на имя капитана Сервадака пришла краткая записка от профессора. Розетт сообщал, что в этот день предлагает выполнить работы, необходимые для определения массы, плотности кометы и напряжения тяжести на ее поверхности.

Сервадак, Тимашев и Прокофьев боялись пропустить свидание, назначенное вспыльчивым ученым. С утра все собрались в большой зале. Профессор, по-видимому, не был в дурном настроении, - но день только начался.

Все знают, что такое напряжение тяжести. Это сила притяжения, проявляемая Землей по отношению к телу, масса которого равна единице. Галлийцам было известно, что это притяжение на Галлии ослаблено, - откуда и возрастание мускульной силы галлийцев. Но они не знали, на сколько именно тяжесть ослабела.

Итак, первый вопрос, подлежавший разрешению, был: как велико напряжение тяжести на поверхности Галлии?

Второй вопрос: какова масса Галлии, а следовательно, и ее вес?

Третий вопрос: какую массу заключает вещество Галлии в единице объема? Другими словами: какова ее плотность?

- Сегодня, - начал профессор, - мы закончим определение элементов моей кометы. Когда мы определим напряжение тяжести на ее

поверхности, ее массу и плотность, для нас не будет больше тайн на Галлии. В результате мы взвесим Галлию.

Ординарец Бен-Зуф как раз при этих последних словах вошел в залу. Он тотчас же молча вышел, но вскоре появился вновь и сказал лукаво:

- Я обшарил кладовую, но не нашел весов, подходящих для взвешивания кометы. Да я и не знаю, куда бы мы их привесили.

При этом Бен-Зуф выглянул наружу, словно ища гвоздя на небе.

Взгляд, брошенный на него профессором, и жест Сервадака заставили шутника замолчать.

- Прежде всего, - сказал профессор, - нужно узнать, сколько весит на Галлии земной килограмм. Так как масса Галлии меньше массы Земли, то все тела на ее поверхности весят меньше, чем на Земле[15]. Но на сколько именно - вот это необходимо знать.

- Совершенно верно, - ответил Прокофьев. - Но обыкновенные весы, если бы мы их даже имели, не годились бы для этого, так как обе их чашки одинаково подвержены притяжению Галлии и не указали бы нам соотношения весов галлийского и земного.

- Действительно, - подхватил Тимашев, - килограмм, которым мы будем пользоваться, потеряет в своем весе столько же, сколько и взвешиваемая вещь, и…

- Если вы говорите все это в назидание мне, - объявил профессор, - то напрасно теряете время. Прошу вас, позвольте мне продолжать курс.

Профессор держал себя, словно на кафедре.

- Есть ли у вас пружинные весы и гиря в один килограмм? - продолжал он. - Это необходимо. В пружинных весах вес тела определяется степенью растяжения пружины, обусловленного ее упругостью. Поэтому, если я подвешу груз в 1 килограмм к пружинным весам, указатель покажет в точности, сколько весит 1 килограмм на Галлии. Повторяю: имеются у вас пружинные весы?

Слушатели смотрели друг на друга. Сервадак обратился к Бен-Зуфу, хорошо знавшему весь инвентарь колонии.

- У нас нет ни пружинных весов, ни гирь, - ответил ординарец.

Профессор выразил свою досаду, энергично топнув ногой.

- Но, - продолжал Бен-Зуф, - я, кажется, знаю, где есть пружинные весы, а пожалуй, и гири.

- Где?

- У Хаккабута[16].

- Так надо пойти за ними, - сказал капитан.

- Иду, - ответил ординарец.

- Я с тобой, - сказал капитан. - Хаккабут не особенно сговорчив, когда дело доходит до того, чтобы ссудить что-нибудь.

- Пойдемте все, - предложил Тимашев. - Посмотрим, как устроился он на своей тартане[17].

Когда все выходили, профессор сказал Тимашеву:

- Не может ли кто-нибудь из ваших людей обтесать осколок каменистой массы, чтобы получился в точности кубический дециметр?

- Наш механик сделает это без труда, но при одном условии: если его снабдить метром, необходимым для точного отмеривания.

- Разве у вас нет метра? - спросил профессор.

В кладовых не было метра: это удостоверил Бен-Зуф.

- Но, - прибавил он, - весьма возможно, что метр найдется у Хаккабута.

- Так идемте же, - торопил профессор, поспешно направляясь в коридор.

*** * ***

Исаак Хаккабут стоял в углу с видом человека, ожидающего приговора суда.

- Хозяин Исаак, - сказал капитан, - мы пришли к вам, чтобы попросить об услуге.

- Услуге?

- Одним словом: можете ли вы ссудить нам пружинные весы?

- Вы просите меня ссудить вам…

- Только на один день, - вмешался профессор, - всего на один день. Вам возвратят их.

- Но это очень деликатный инструмент; пружина может сломаться на таком холоде… Вам понадобится, может быть, взвешивать что-нибудь очень тяжелое?

- Уж не думаешь ли ты, - сказал ординарец - что мы будем вешать

гору?

- Больше чем гору, - заметил профессор. - Мы взвесим Галлию.

- Помилуйте! - воскликнул Хаккабут.

- Хозяин, - вмешался капитан, - пружинные весы нам нужны, чтобы взвесить вещь, не тяжелее килограмма.

- Еще меньше килограмма, вследствие ослабления тяжести на Галлии. Словом, вам нечего опасаться за свои весы.

- А вы внесете мне залог?

- Да. Сто франков. Весы стоят двадцать. Достаточно?

- А плата за пользование?

- Двадцать франков.

Торг был заключен. Хаккабут принес инструмент. Это были пружинные весы с крючком, на который навешивался груз. Стрелка на циферблате показывала вес. Предназначенный для взвешивания земных предметов, инструмент был градуирован на Земле. Но каковы будут его показания на Галлии?

Посетители встали, чтобы покинуть тартану, когда профессор задержал всех:

- Нам надо еще взять у него метр и гирю в один килограмм.

- К сожалению, невозможно, - ответил Хаккабут, - я рад был бы их дать вам…

На этот раз он говорил искренно, утверждая, что у него нет ни метра, ни гири и что он охотно дал бы их в пользование: сделка была бы выгодная.

- Придется как-нибудь обойтись без них, - сказал раздосадованный профессор.

Не успели посетители сойти с тартаны, как из каюты донесся звон монет: Хаккабут пересчитывал золото в своих ящиках.

Услышав этот звук, профессор кинулся назад к лестнице, все с недоумением смотрели на него, не зная, чему приписать его стремительность.

- У вас есть деньги? - крикнул профессор, хватая торговца за платье.

- У меня… деньги!… - шептал Хаккабут, словно на него напал грабитель.

- Французские монеты! - продолжал профессор.

- Пятифранковые монеты!

Профессор наклонился над ящиком.

- Это французские монеты, - заявил он, - и они мне нужны.

- Никогда!… - кричал торговец.

- Они мне нужны, говорю тебе, и они у меня будут!

Сервадак видел, что пришло время вмешаться.

- Вам нужны деньги? - спросил он профессора. - Определенное число монет для ваших исследований?

- Да, сорок монет.

- Двести франков! - шептал торговец.

- И кроме того, десять монет в два франка и двадцать монет по 50 сантимов.

- Тридцать франков! - жалобно стонал Хаккабут.

- Хорошо, - сказал капитан, обращаясь к Тимашеву,

- есть у вас что дать Хаккабуту в обеспечение займа?

- Двести рублей кредитными билетами.

Тимашев бросил на стол деньги. Французские монеты, потребованные профессором, были ему вручены, и он с видимым довольством спрятал их в карман.

Через несколько минут капитан и его спутники покинули тартану.

- Это не двести тридцать франков, - воскликнул профессор, - это то, из чего мы изготовим в точности и метр, и килограмм!

*** * ***

Спустя четверть часа посетители тартаны вновь собрались в общей зале, и последние слова профессора получили свое объяснение.

Профессор распорядился расчистить место на столе. Деньги, занятые у торговца, были рассортированы по их достоинству, образовав два столбика в 20 монет по пяти франков, один - из 10 монет по два франка и еще один - из 20 монет по 50 сантимов.

Профессор начал с удовлетворенным видом:

- Так как при столкновении с кометой мы не догадались запастись метром и гирей в один килограмм, то я вынужден был придумать способ заменить эти предметы, необходимые мне для определения

напряжения тяжести, массы и плотности моей кометы.

Никто не прерывал этого странного вступления.

- Я убедился, - продолжал профессор, - что монеты эти почти новы, нисколько не изношены, не потерты. Они как раз в таком состоянии, какое необходимо, чтобы разрешить нашу задачу с надлежащею точностью.

Сервадак и его товарищи угадали намерения профессора, прежде чем он изложил их до конца. Но ординарец взирал на него, как на фокусника, готовящегося выполнить очередной «номер».

Вот на чем основывал ученый свою первую операцию, идея которой возникла в его уме, когда он услышал звон монет в ящике торговца.

Известно, что монеты Франции заготовляются по десятичной системе, включающей в пределах от сантима до ста франков: 1) медные монеты в 1, в 2, в 3 и в 10 сантимов; 2) серебряные - в 20 и в 50 сантимов, в 1, в 2 и в 5 франков; 3) золотые - в 5, в 10, в 20, в 50 и в 100 франков.

Для профессора Розетта важно было то, что диаметры этих монет были строго определены законом. Так, диаметр пятифранковой монеты равен 37 миллиметрам, двухфранковой - 27 миллиметрам, полуфранковой - 18 миллиметрам. Нельзя ли поэтому, прикладывая друг к другу монеты различного достоинства, получить точно длину метра?

Вполне возможно, и профессор знал это; вот почему он выбрал 10 монет по пяти франков, десять по два франка и 20 монет по 50 сантимов.

В самом деле: набросав быстро на клочке бумаги следующий расчет, он представил его слушателям:

10 монет	5-франковых,	по 0,037 м =0,37 м
10 »	2 »	по 0,027 » =0,27 »
20 »	50-сантимовых,	по 0,018 » =0,36 »
		Итого — 1,00 м.

- Прекрасно, дорогой профессор, - сказал Сервадак. - Остается лишь тщательно выложить эти 40 монет в одну прямую линию, чтобы получить точную длину метра.

- О, - воскликнул ординарец. - Быть ученым, я вижу, совсем неплохо!

- Он называет это быть ученым, - заметил профессор, пожимая плечами.

Десять пятифранковых монет были выложены в один ряд, одна к другой так, чтобы центры их были на одной прямой; к ним примыкали десять двухфранковых монет и двадцать полуфранковых. Границы составившейся длины были отмечены черточками.

- Вот, - объявил профессор, - точная длина метра.

Операция была выполнена с крайней тщательностью. Полученная длина была циркулем разделена на десять частей, т. е. на дециметры, и брусок соответствующей длины был вручен судовому механику.

Тот уже раздобыл обломок неизвестной горной породы, из которой составлена была масса Галлии, и оставалось лишь, как требовал профессор, обтесать его в форме кубического дециметра.

Метр был получен. Теперь надо было изготовить гирю в один килограмм.

Это было более легким делом. Действительно, французские монеты имеют не только строго определенный диаметр, но и установленный законом вес. Пятифранковая монета весит ровно 25 граммов, что составляет вес пяти монет по одному франку[18]. Достаточно поэтому взять 40 серебряных монет по 5 франков, чтобы получился вес в 1 килограмм.

- Как вижу я, - сказал ординарец, - быть ученым все же недостаточно, надо еще…

- Что еще? - спросил Сервадак.

- Быть богатым.

Замечание было встречено дружным хохотом.

Через несколько часов механик доставил профессору тщательно выточенный кубик из горной породы. Теперь ученый имел все необходимое.

- Должен напомнить вам, - начал профессор, - на случай, если вы забыли или не знали, знаменитый закон Ньютона, согласно которому сила притяжения прямо пропорциональна произведению масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния. Прошу всегда твердо помнить этот закон.

Он читал лекцию блестяще. Да и аудитория его, надо признать, была хорошо дисциплинирована.

- В этом мешочке, - продолжал он, - 40 пятифранковых монет. На

Земле эта кучка монет весит ровно один килограмм. Следовательно, будь мы на Земле, и я привесил бы к весам этот мешочек с монетами, указатель остановился бы на одном килограмме. Понятно?

Произнося эти слова, профессор не спускал глаз с Бен-Зуфа. Он подражал при этом Араго, на своих лекциях всегда смотревшего в упор на того из слушателей, который казался ему наименее понятливым; и когда этот слушатель обнаруживал признаки понимания, лектор приобретал уверенность в том, что прочитанное усвоено всеми[19].

Ординарец капитана Сервадака не был тупицей, но был невежествен, - а при данных обстоятельствах это было одно и то же.

Так как Бен-Зуф, по-видимому, понял, профессор продолжал:

- Итак, я подвешиваю мешочек с монетами; наше взвешивание происходит на Галлии, поэтому мы сейчас узнаем, сколько весят монеты на поверхности моей кометы.

Мешочек был подвешен к крючку; указатель после нескольких колебаний остановился, показывая на разделенном круге 133 грамма.

- Итак, - объяснил профессор, - то, что на Земле весит 1 килограмм, на Галлии весит только 133 грамма, т. е. приблизительно в 7 раз меньше. Ясно?

Бен-Зуф кивнул головой, и профессор, ободренный, продолжал:

- Вы понимаете, конечно, что результат, полученный с помощью пружинных весов, совершенно недостижим на весах обыкновенных. В самом деле: если на одну чашку таких весов положить эти монеты, на другую - гирю в один килограмм, то обе чашки потеряют в весе на Галлии одинаково, и равновесие не нарушится. Понятно?

- Даже мне, - ответил ординарец.

- Итак, здесь вес в 7 раз меньше, чем на земном шаре. Отсюда следует, что напряжение тяжести на Галлии составляет седьмую часть напряжения тяжести на поверхности Земли.

- Прекрасно, - ответил Сервадак. - Теперь, дорогой профессор, перейдем к массе.

- Нет, сначала к плотности, - возразил Розетт.

- В самом деле, - вмешался лейтенант Прокофьев. - Раз объем Галлии известен, то, зная плотность, мы получим и массу.

Он был прав; оставалось лишь произвести измерение плотности.

К этому и приступил профессор. Он взял выточенный из горной породы кубик объемом в один кубический дециметр.

- Этот кубик, - объяснил он, - состоит из того неизвестного вещества, которое мы всюду находили на Галлии во время кругосветного плавания. По-видимому, моя комета целиком состоит из этого вещества. Здесь перед нами кубический дециметр этого минерала. Сколько бы весил он на Земле? Мы найдем его земной вес, если умножим на 7 вес его на Г аллии, так как напряжение тяжести на Галлии в 7 раз слабее, чем на Земле. Взвесим же этот образчик. Это равносильно тому, как если бы мы нацепили на крючок весов нашу комету.

Кубик был подвешен к весам, и стрелка показала 1 килограмм 430 граммов.

- Один килограмм 430 граммов, - громко объяснял профессор, - умноженные на 7, составляют почти ровно 10 килограммов. А так как средняя плотность земного шара круглым счетом равна 5, то средняя плотность Галлии вдвое более плотности Земли. Если бы не это обстоятельство, напряжение тяжести на комете было бы не в 7 раз слабее земного, а в 14.

Итак, теперь уже были известны диаметр Галлии, ее поверхность, объем, плотность и напряжение тяжести. Оставалось определить ее массу, а следовательно, и вес.

Вычисление было выполнено быстро. Так как кубический дециметр вещества Галлии весил 10 земных килограммов, то вся комета должна весить столько раз по 10 килограммов, сколько в ее объеме содержится кубических дециметров. Объем Галлии, как мы уже знаем, равен 212.006.737 кубическим километрам. Поэтому вес Галлии выражается в килограммах огромным числом из 22 цифр, а именно:

2 120 067 370 000 000 000 000,

т. е. 2120 триллионов 67.370 биллионов килограммов[20]. Такова в земных килограммах масса Галлии.

- Сколько же тогда весит Земля? - спросил ординарец.

- А понимаешь ли ты, что такое миллиард? - спросил его Сервадак.

- Плоховато, капитан.

- Ну так знай же, что от начала нашей эры не прошло еще одного миллиарда минут[21], и если бы ты должен был миллиард франков, то, начав выплачивать с того времени по франку каждую минуту, ты до сих пор не расплатился бы.

- По франку в минуту! - воскликнул Бен-Зуф. - Да я разорился бы в

первую четверть часа. А сколько же все-таки весит Земля?

- Шесть квадриллионов 604 тысячи триллионов килограммов[22], - ответил лейтенант Прокофьев. - Число это состоит из 25 цифр.

- А Луна?

- 73 тысячи 700 триллионов килограммов.

- Только всего. А Солнце?

- Два квинтильона[23] килограммов, число из 31 цифры.

- Ровно два квинтильона? - воскликнул Бен-Зуф. - Наверное, на несколько граммов ошиблись…

Профессор бросил на ординарца презрительный взгляд и величественно вышел из залы, чтобы подняться в свою обсерваторию.

- И к чему, скажите, все эти вычисления, - спросил ординарец, - которые ученые проделывают, словно какие-то фокусы?

- Ни к чему, - ответил капитан, - в этом-то и вся их прелесть!

Примечания редактора

Жюль Верн держится в этом произведении ныне устарелого взгляда на кометы, считая их голову сплошным твердым шаром большой плотности. В настоящее время голову кометы рассматривают как весьма рыхлое скопление твердых частиц.

*** * ***

Монеты СССР, как и французские, имеют установленые законом размеры и вес, а именно[24]:

	Диаметр:	*Вес:*	
Серебряные:			
1 рубль	33,4 мм	20 граммов	
50 коп.	26,67 »	10 »	
30 »	21,84 »	3,6 »	
15 »	19,56 »	2,7 »	
10 »	17,27 »	1,8 »	
Медные, образца 1924 г.:			
5 коп.	32 мм		
3 »	27,7 »	Медные монеты на	
2 »	24 »	сумму 50 р. весят	
1 »	21,3 »	16,38 кг (1 пуд).	
Медные (бронзовые) нов. образца:			
5 коп.	25 »	5 г	
3 »	20 »	3 г	
2 »	18 »	2 г	
1 »	15 »	1 г	

Диаметр золотого червонца - 2 сантиметра, вес - 8,53 грамма (2 золотника).

Легко видеть, что восстановить длину метра, пользуясь нашими монетами, довольно просто: для этого достаточно выложить в ряд 30 серебряных рублей:

33,4 мм x 30 = 1002 миллиметра = 1,002 метра.

Здесь получается избыток в 2 миллиметра. Пользуясь же новыми, бронзовыми монетами, это можно сделать вполне точно, взяв 40 пятаков или 50 трехкопеечных монет:

25 мм x 40 = 1000 мм = 1 м;

20 мм x 50 = 1000 мм = 1 м.

Для составления веса в 1 килограмм можно взять 50 серебряных рублей или 100 полтинников:

20 г x 50 = 1000 г = 1 кг;

1 г x 100 = 1000 г = 1 кг.

*** * ***

Для вычисления массы Галлии существует другой, более короткий путь, нежели тот, который описан в романе. Действительно, раз известны диаметр Галлии и напряжение тяжести на ее поверхности, то массу ее можно было вычислить, не делая никаких новых измерений, - в частности, не измеряя непосредственно ее средней плотности. Напротив, эту плотность можно было по указанным данным определить вычислением гораздо точнее, чем измерением.

Ход вычисления массы весьма несложен. Допустим, что масса Галлии равна массе Земли, между тем как радиус ее составляет всего 370 километров. Тогда напряжение тяжести на Галлии было бы больше, чем на поверхности Земли, соответственно большей близости тяготеющих предметов к центру притяжения. А именно: по закону обратных квадратов сила притяжения на уменьшенном расстоянии должна была бы возрасти в отношении примерно

$$\frac{6370^2}{370^2} = \frac{40577000}{136900} = 296.$$

В действительности же, как показало измерение с помощью пружинных весов, напряжение тяжести на поверхности Галлии не только не возросло в указанном отношении, но, напротив, еще ослабело в 7 раз. Другими словами: напряжение тяжести на реальной Галлии меньше, чем на нашей воображаемой (с массой, равной массе Земли) в 7 x 296 = 2072 раза. Это различие может быть обусловлено только одной причиной: тем, что истинная масса Галлии во столько же раз меньше предположенной (притяжение прямо пропорционально массе). Итак, масса Галлии составляет $^1/_{2072}$ - долю массы земного шара. Зная массу Земли (6.604.000 триллионов килограммов), находим массу Галлии:

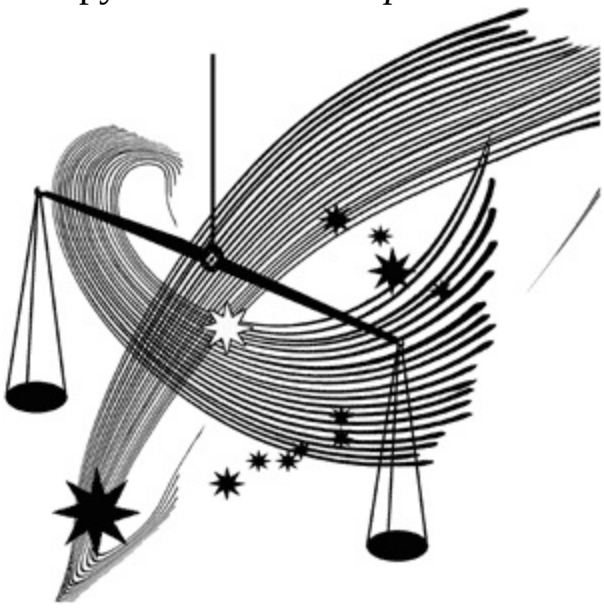
3187 триллионов килограммов.

Этот результат не согласуется с результатом, упомянутым в тексте романа (2120 триллионов кг).

Зная массу Галлии и ее диаметр, нетрудно уже определить вычислением ее среднюю плотность. Для этого нужно лишь полученную массу кометы разделить на ее объем; в частном получится число килограммов вещества в единице объема (в 1 дециметре), т. е. то, что называется плотностью тела. Объем Галлии - 212.006.737 куб. километров - раздробляем в куб. дециметры; получаем 212.006.737 биллионов. Разделив на это число ранее полученную массу кометы, т. е.

3187 триллионов килограммов, получаем для средней плотности Галлии величину около 15 килограммов, - т. е. не ту, которую профессор Розетт нашел непосредственным измерением.

Мы видим, что не было никакой надобности определять вес кубического дециметра горной породы, составляющей Галлию. Это измерение не годилось даже в качестве контрольного, - для проверки результата, полученного вычислением, - так как вычисленная средняя плотность дает более надежный результат: здесь нет рискованного допущения, что вся комета до самого центра состоит из того же вещества, которое обнаружено на ее *поверхности*.



Предшественник Нансена

Рассказ В. Ольдена[25]

- Вы верите, что Нансен открыл северный полюс? - спросил я старого моряка, моего приятеля, когда интересная весть разнеслась по Европе[26].

Он уклонился от прямого ответа и небрежно заметил, что «если Нансен и добрался до полюса, то во всяком случае не прежде всех».

- Странно, друг мой. По-вашему, у Нансена были предшественники? Почему же они не рассказали ничего, вернувшись домой?

- Нисколько не странно, - отвечал моряк. - Разве можно обо всем рассказывать? Вы думаете, мало на свете людей, которые видели собственными глазами морскую змею? Не очень лестно, когда всякая встречная газета выбранит вас, - вот все и молчат по возможности. Никто все равно не поверит. Ну, если, например, я скажу вам, что я единственный оставшийся в живых из команды китоловного судна, проживший на северном полюсе почти неделю - что вы на это скажете? Поверите или нет?

- Не могу ничего ответить, пока не узнаю подробностей.

- Для вас я, пожалуй, сделаю исключение, - ответил мой приятель, - и расскажу (хотя и не думаю, что вы поверите), как я и шестеро других людей открыли северный полюс двадцать девять лет тому назад.

Мы вышли на шхуне «Марта Уилльямс» из Нью-Бедфорда, в Соединенных Штатах, в Северный Ледовитый океан на ловлю китов. Судно было в пятьсот пятьдесят тонн; я занимал на нем место штурмана; капитан наш, Билль Шаттук, пользовался славой ловкого командира, у которого комар носа не подточит. В Вальпараисо мы пристали за картофелем, в Сан-Франциско - за водой, и пришли в китовые места - к северу от Берингова пролива - в половине июня. Китоловных судов там оказался целый флот, но добычи очень мало. Лето было жаркое, и киты, вероятно, ушли дальше на север, вместо того, чтобы поджидать нас на месте. Целый месяц мы прошатались в этих водах и нашли только одного, да и то жалкого. Наконец, надоело; некоторые шхуны пошли обратно на юг, а большинство к северо-востоку. Наш капитан вздумал отделиться от всех и направился на северо-запад. Льда не было видно нигде, и решение капитана не могло вызвать никаких подозрений, хотя - как оказалось впоследствии - он неожиданно сошел с ума.

Двенадцать дней шли мы на северо-запад, под ровным южным ветром, не встретив ни одного кита. В море стали попадаться плавучие ледяные горы, и я думал, что капитан повернет обратно, - но у него не то было на уме. Он держал теперь прямо на север и объявил, что намерен пройти к северному полюсу, а оттуда в Атлантический океан.

- Для этого нам понадобится не более двух недель, если продержится ветер, а открытием северного полюса мы наживем вдвое больше денег, чем если бы переполнили судно китовым жиром.

Я промолчал, потому что моей обязанностью было исполнять приказания, а не рассуждать.

Через восемь с половиной суток нас прищемили изрядные ледяные горы. Вся передняя часть судна, до самой грот-мачты, превратилась в тонкий слой щепок. Я едва успел выскочить на палубу, когда оставшиеся на корме пять человек команды и капитан спустили лодку. Через минуту мы отчалили, а еще через несколько минут увидели, как останки «Марты Уилльямс» медленно опустились на дно.

Вы, вероятно, думаете, что после этого старик Шаттук отказался от фантазии открыть северный полюс и постарался пройти к берегам Сибири, где мы могли встретить туземцев или русских купцов. Но нет, куда тут! Он прехладнокровно отдал приказание держать прямо на полюс.

Развернули паруса, - народу было немного, лодка хорошая, - и весело полетели вперед, насколько могут быть веселы добрые матросы, когда табак давно вышел и нечего будет курить в продолжение нескольких недель.

На вторые сутки мы попали в какой-то пролив и увидели с одной стороны ледяные горы, а с другой - высокий скалистый берег. Жители заметили нас и уже стояли в ожидании на прибрежном утесе, с любопытством поглядывая, как мы причаливали и выходили на землю. Человек тридцать мужчин, женщин и детей окружили нас и приветствовали.

Добродушные они были ребята; сейчас повели нас в свои снеговые пещеры и накормили рыбьим жиром, какой-то морской травой и рыбой. Наевшись до тошноты, старый Шаттук вынул секстант[27] и принялся за наблюдения.

- Мы находимся в такой точке земного шара, где ни долготы, ни широты нет, - объявил он нам, окончив исследования, - на северном полюсе! Мы сделали величайшее открытие; нам принадлежит честь, которой добивались многие.

Затем он наклонился и принялся отыскивать кончик земной оси. Видя, что старик рассматривает землю и чего-то ищет, туземцы повели нас на вершину острова и показали нечто в роде кресла, вырезанного из каменной глыбы. Через матроса Джаксона, датчанина, они объяснили, что с этим креслом у них связаны какие-то священные понятия и никто не помнит, сколько времени оно тут стоит.

- Отлично, - объявляет вдруг безумный старик. - Это-то и есть северный полюс, и я беру его в свое владение. Да здравствуют Северо-Американские Соединенные Штаты и капитан Билль Шаттук!

С этими словами он усаживается на первобытное кресло и отдает нам приказание «обращаться» вокруг него.

Видите ли: так как мы находились на северном полюсе, то солнце действительно обращалось вокруг нас, как вращаются иногда улицы, когда выпьешь лишнее. На шесть месяцев «солнце уходило отдыхать», - как сообщили нам туземцы, - но другие шесть месяцев оно разгуливало на десять градусов над горизонтом, не делая даже вида, что хочет закатиться. Вот капитан Шаттук, сильно рехнувшись, и вообразил, что если солнце вокруг него обращается, то подавно обязаны и мы.

Уселся он на каменный трон и роздал приказания. Мне, как

старшему, велено было занять первое место, отступя на десять футов от полюса; остальные матросы должны были расположиться поочереди дальше, на пять футов расстояния друг за другом. Туземцам капитан объявил, что пока они еще не нужны, но когда первые планеты выбьются из сил, тогда он заставит и их исполнять астрономические обязанности.

Нечего делать: пришлось «обращаться». Мы должны были ходить вокруг старика слева направо, со скоростью трех узлов, хотя молодцам, которых он поставил на дальние орбиты, приходилось двигаться быстрее. Старик порядочно муштровал нас. Если кто-нибудь сбивался с круга, он свирепо заявлял, что мы не имеем права устраивать «возмущений» без его приказания; а тому, кто высказывал признаки усталости, кричал:

- Если ты не будешь держаться, как подобает небесному светилу, то я превращу тебя в комету и отправлю по такому эллипсу, что ты через тысячу лет не вернешься.

Вы, конечно, спросите, с какой стати мы подчинились подобным глупостям, так как капитан, согласно морским законам, не имел над нами никакой власти с тех пор, как мы потерпели крушение. Но дело в том, что Шаттук не расставался с двумя револьверами, которые ему удалось сохранить при себе; и эти-то инструменты заставляли нас плясать вокруг него и притворяться, насколько возможно, что нам очень весело.

В полдень он позволил нам передохнуть, и сам сытно пообедал. Воспользовавшись его хорошим настроением, я предложил сделать запас воды и пищи и вернуться в цивилизованные места, прежде чем океан замерзнет. Он удивился моему невежеству:

- Как, м-р Мартин! Вы тридцать лет провели на море и не имеете необходимейших первоначальных сведений. Да ведь мы находимся в точке земного шара, где нет ни долготы, ни широты и где стрелка компаса вращается так бестолково, что немыслимо ничего разобрать. Почем я знаю, где восток и где запад? И куда я поеду без компаса и без долготы?… Нет, сэр, мы на полюсе, и здесь останемся. Мне здесь очень нравится, и вам всем тоже должно нравиться. Когда я сижу в этом кресле - я центр солнечной системы и не намерен оставлять такого положения ради того, чтобы выпрашивать новый корабль.

Больше от него ничего нельзя было добиться. Хорошо, что у него

хватило еще смысла не заставлять команду обращаться двадцать четыре часа в сутки. Отпустив нас на отдых, он велел Джаксону передать туземцам, что теперь их очередь. Я думал, они не подчинятся и не станут бегать без толку, не имея понятия о значении капитанских револьверов. Но, очевидно, они приняли его за какое-то божество, так как принялись обращаться немедленно с величайшей охотой и благоговейно выполняли роль планет с полудня до четырех часов. Потом наступила наша очередь, потом опять их, и т. д.

На следующее утро, когда наша партия принялась за работу, капитан обращается к матросу Смидлею и велит ему приготовиться к затмению.

- Смотри в оба, чтобы все было аккуратно! Ровно в шесть склянок на тебе должно начаться затмение от Джаксона и в семь склянок должно дойти до полного.

Смидлей был порядочный драчун, и все мы знали его кулаки, хотя офицерские приказания он исполнял до сих пор, как хороший матрос. Но это приказание пришлось ему не по нраву. Он обращается к старику и отвечает, что согласен встретить кого угодно и где угодно, но «затмевать» себя никому не позволит, пока у него есть здоровые руки. Капитан напрасно старался убедить Смидлея, что астрономическое затмение нисколько не позорно для матроса; мне пришлось уговаривать его забыть на время, что он матрос, и отнестись к делу хладнокровно, как относятся все небесные тела. Едва-едва уладилось дело.

Потом Шаттук выдумал и для меня занятие.

- М-р Мартин, - говорит он. - По моим вычислениям, вы находитесь теперь в первой четверти. Потрудитесь приращаться постепенно в течение двух недель. На четырнадцатый день у вас должен быть полный диск. Прошу обратить на это внимание.

Я сделал вид, что обратил внимание, хотя не мог понять, чего ему надо и как может человек приращаться, когда нет сердцекрепительных напитков и нечего есть, кроме рыбьего жира.

Двое суток продолжалось вращательное занятие. Этого было вполне достаточно, даже и без всяких затмений, приращений и полных дисков, которые как будто и не к лицу порядочному матросу. В один из отдыхов, пока туземцы бегали с прежним умилением, мы решили, что капитан окончательно рехнулся и что с нашей стороны будет даже великодушием схватить его, связать по рукам и ногам и уложить в

лодку, а потом запастись у туземцев пищей и отправиться домой. План казался легким, потому что капитан был не особенно сильный мужчина; мы решили, что двое из нас схватят его сзади и обезоружат, пока остальные будут пробегать по своим орбитам перед его глазами.

Так мы и попробовали сделать на третий день утром.

Когда он, казалось, задремал и двое самых сильных матросов подскочили к нему сзади, - он внезапно обернулся и первыми двумя выстрелами уложил обоих на месте. Тогда остальные бросились на него, понимая, что если мы не овладеем оружием, то всем придется плохо. Несколько минут длилась отчаянная борьба. Когда она окончилась, пятеро матросов были убиты наповал, капитан лежал с ножом Джаксона в сердце, а у меня засела пуля в левой руке выше локтя.

Я остался один из всей команды и сейчас же принялся делать туземцам разные жесты и знаки, стараясь объяснить, что у меня самые мирные намерения и я только прошу дать мне воды и пищи, чтобы уехать. Они меня прекрасно поняли и уложили в лодку столько рыбы и воды, что хватило бы на два месяца.

Я пустил лодку по ветру, не обращая внимания на компас; только через три или четыре дня, взглянув на него, я увидел, что иду к юго-западу. На пятый день я «нашел» долготу места и так обрадовался, словно это был не десятый меридиан, а добрая мера табаку. Пользуясь северным ветром, я старался не уклоняться в сторону и через тридцать пять дней был взят на первое встретившееся судно. Это была английская китоловная шхуна, которая и доставила меня в Бристоль в конце октября.

Конечно, я никогда ни одним словом не обмолвился о северном полюсе. Но вам я сообщил сущую правду и хотел бы знать, ради любопытства, что вы теперь думаете.

- Давайте выпьемте по второму стакану горячего джина, - отвечал я.

Примечание редактора

ЖИВОЙ ПЛАНЕТАРИЙ

Странная фантазия - приказать матросам «исполнять астрономические обязанности», будто бы возникшая, по словам моряка, в помутившемся уме капитана, вовсе не так сумасбродна и фантастична, как, пожалуй, склонны подумать иные читатели. Идея заставить товарищей разыгрывать в лицах планетную систему является, по-видимому, лишь неуместным воспоминанием о школьных упражнениях на уроках космографии. Эти оригинальные упражнения состоят в том, что, ради наглядности, школьники устраивают так называемый «живой планетарий», то есть своими движениями изображают живое подобие планетной системы. У нас подобный прием почему-то мало употребителен, хотя он значительно облегчает уяснение многих трудностей планетных движений. Опишем поэтому некоторые из этих поучительных упражнений.

Возьмем, например, движение Луны вокруг Земли. Мы знаем, что Луна всегда обращена к Земле одною и тою же своей стороной, и выводим отсюда, что период обращения нашего спутника вокруг Земли равен периоду его вращения вокруг своей оси. Однако такой вывод для многих непонятен: некоторым представляется более правильным вывод, что Луна вовсе не вращается вокруг своей оси, раз она неизменно обращена к Земле одной и той же стороной. «Живой планетарий» легко и просто разъясняет это недоразумение. Проделаем такое упражнение: пусть один из учащихся станет в середине комнаты, впереди класса, - он будет изображать Землю; другой, изображающий Луну, пусть обходит кругом него, все время обращаясь лицом к «Земле». Тогда остальные учащиеся, сидящие на своих партах, будут видеть «Луну» сначала сзади, потом сбоку, потом с лица, потом с другого бока и, наконец, когда «Луна» закончит полный круг - снова сзади. Другими словами, все наглядно убедятся, что «Луна», обходя вокруг «Земли» с неизменно обращенным к ней лицом, вращается в то же время и вокруг своей оси - иначе они не видели бы ее последовательно со всех четырех сторон.

Напротив, если бы наша живая Луна обращалась вокруг «Земли» так, чтобы сидящие на партах все время видели «Луну» с одной и той же стороны, например спереди, т. е. если бы она не вращалась вокруг собственной оси, то «Земля» видела бы ее последовательно со всех

четырех сторон, - вопреки мнению тех, кто полагает, что именно при этом условии Луна должна быть обращена к Земле неизменно одною и той же стороною.

В более пространном помещении - в обширной зале или на открытом воздухе - можно наглядно «разыграть в лицах» также совместное движение Земли и Луны вокруг Солнца. Для этого один из учащихся, изображающий Солнце, помещается в середине зала, а на некотором расстоянии становится другой, представляющий Землю, который и обходит медленным шагом кругом «Солнца», в то время как третий - в роли Луны - кружится вокруг этой живой Земли с такой скоростью, чтобы успеть сделать около 12 полных оборотов, пока «Земля» замкнет один круг. При этом станет ясно, что путь Луны в пространстве представляет собою волнистую круговую линию. Для большей наглядности можно натереть мелом подошвы учащегося, изображающего Луну - и тогда следы его ног непосредственно начертят лунный путь. Под открытым небом, если упражнение производится зимою, путь Луны отметится сам собою следами ног на снегу.

Благодаря такого рода упражнениям можно с легкостью уяснить и многие другие особенности планетных движений, затруднительные для понимания. Рассмотрим хотя бы явление прямого и попятного движения планет, которое обычно, по мертвым книжным чертежам, усваивается не без труда. Живой планетарий поможет весьма быстро составить вполне отчетливое представление об этих движениях. Один из учащихся в роли Солнца становится в середине просторного зала или площадки на дворе; у стен зала или у краев площадки размещаются остальные, играющие в данном случае роль неподвижных звезд. Двое на этот раз будут изображать собою планеты, один - Землю, другой - какую-нибудь внешнюю планету, например Юпитер. Обе живые планеты обходят вокруг «Солнца», но с различной скоростью - «Земля» движется быстрее «Юпитера», совершая 11-12 полных кругов, пока «Юпитер» закончит один круг. И вот, выполняя свое движение, учащийся, принявший на себя роль Земли, внимательно следит за тем, против каких «неподвижных звезд» оказывается при этом «Юпитер»: он ясно заметит, что Юпитер движется то вперед между «звездами», то назад, совершая характерные для внешних планет прямое и попятное движение на звездном небе[28].

Универсальная библиотека

Рассказ Курда Лассвица[29]

- Ну, садись же сюда, Макс, - сказал профессор. - В бумагах моих, право, ничего для твоей газеты не найдется.

- В таком случае, - отвечал Макс Буркель, - тебе придется что-нибудь написать для нее.

- Не обещаю. Написано уже, да к сожалению и напечатано, так много лишнего…

- Я и то удивляюсь, - вставила хозяйка, - что вы вообще находите еще что-нибудь новое для печатания. Уж кажется, давно бы должно было быть перепробовано решительно все, что мыслимо составить из вашей горсти типографских литер.

- Можно было бы, пожалуй, так думать. Но дух человеческий поистине неистощим…

- В повторениях?

- О, да, - рассмеялся Буркель, - но также и в изобретении нового.

- И несмотря на это, - заметил профессор, - можно изобразить буквами все, что человечество когда-либо создаст на поприще истории, научного познания, поэтического творчества, философии. По крайней мере, поскольку это поддается словесному выражению. Книги наши ведь заключают все знание человечества и сохраняют сокровища, накопленные работой мысли. Но число возможных сочетаний букв

ограничено. Поэтому вся вообще возможная литература должна уместиться в конечном числе томов.

- Э, старина, в тебе говорит сейчас математик, а не философ! Может ли неисчерпаемое быть конечным?

- Позволь, я подсчитаю тебе сейчас, сколько именно томов должна заключать такая универсальная библиотека… Дай-ка мне с письменного стола листок бумаги и карандаш, - обратился профессор к жене.

- Прихватите заодно и таблицы логарифмов, - сухо заметил Буркель.

- Они не понадобятся, - сказал профессор и начал: - Скажи мне, пожалуйста: если печатать экономно и отказаться от роскоши украшать текст разнородными шрифтами, имея в виду читателя, заботящегося лишь о смысле…

- Таких читателей не бывает.

- Ну, допустим, что они существуют. Сколько типографских литер потребовалось бы при таком условии для изящной и всякой иной литературы?

- Если считать лишь прописные и строчные буквы, обычные знаки препинания, цифры и, не забудем, шпации…

Племянница профессора вопросительно взглянула на говорившего.

- Это типографский материал для промежутков - пояснил он, - которым наборщики разъединяют слова и заполняют пустые места. В итоге наберется не так уж много. Но для книг научных! У вас, математиков, такая масса символов…

- Нас выручают индексы, - те маленькие цифры, которые мы помещаем при буквах: a_1, a_2, a_3, a_4 и т. д. Для этого понадобится лишь еще один или два ряда цифр от 0 до 9. Аналогичным образом можно условно обозначать и любые звуки чужих языков.

- Если так, то потребуется, я думаю, не более сотни различных знаков, чтобы выразить печатными строками все мыслимое[30].

- Теперь дальше. Какой толщины взять тома?

- Я полагаю, что можно вполне обстоятельно исчерпать тему, если посвятить ей том в 500 страниц. Считая на странице по 40 строк с 50 типографскими знаками в каждой (включаются, конечно, шпации и знаки препинания), имеем 40 х 50 х 500 букв в одном томе, т. е… впрочем, ты подсчитаешь это лучше…

- Миллион букв, - сказал профессор. - Следовательно, если

повторять наши 100 литер в любом порядке столько раз, чтобы составился том в миллион букв, мы получим некую книгу. И если вообразим все возможные сочетания этого рода, какие только осуществимы чисто механическим путем, то получим полный комплект сочинений, которые когда-либо были написаны в прошлом или появятся в будущем.

Буркель хлопнул своего друга по плечу.

- Идет! Беру абонемент в твоей универсальной библиотеке. Тогда получу готовыми, в напечатанном виде, все полные комплекты моей газеты за будущие годы. Не будет больше заботы о подыскании материала. Для издателя - верх удобства: полное исключение авторов из издательского дела. Замена писателя комбинирующей машиной, неслыханное достижение техники!

- Как! - воскликнула хозяйка. - В твоей библиотеке будет решительно все? Полный Гете? Собрание сочинений всех когда-либо живших философов?

- Со всеми разночтениями при том, какие никем еще даже не отысканы. Ты найдешь здесь полностью все утраченные сочинения Платона или Тацита и в придачу - их переводы Далее найдешь все будущие мои и твои сочинения, все давно забытые речи депутатов рейхстага и все те речи, которые еще должны быть там произнесены, полный отчет о международной мирной конференции и о всех войнах, которые за нею последуют Что не уместится в одном томе, может быть продолжено в другом

- Ну, благодарю за труд разыскивать продолжения!

- Да, отыскивать будет хлопотливо. Даже и найдя том, ты еще не близок к цели: ведь там будут книги не только с настоящими, но и со всевозможными неправильными заглавиями.

- А ведь верно, так должно быть!

- Встретятся и иные неудобства. Возьмешь, например, в руки первый том библиотеки. Смотришь: первая страница - пустая, вторая - пустая, третья - пустая, и т. д. все 500 страниц. Это тот том, в котором шпация повторена миллион раз…

- В такой книге не может быть, по крайней мере, ничего абсурдного, - заметила хозяйка.

- Будем утешаться этим. Берем второй том: снова все пустые страницы, и только на последней, в самом низу, на месте миллионной

литеры приютилось одинокое *а*. В третьем томе - опять та же картина, только *а* передвинуто на одно местечко вперед, а на последнем месте - шпация. Таким порядком буква *а* последовательно передвигается к началу, каждый раз на одно место, через длинный ряд из миллиона томов, пока в первом томе второго миллиона благополучно достигнет, наконец, первого места. А за этой буквой в столь увлекательном томе нет ничего - белые листы. Такая же история повторяется и с другими литерами в первой сотне миллионов наших томов, пока все сто литер не совершат своего одинокого странствования от конца тома к началу. Затем то же самое происходит с группой *аа* и с любыми двумя другими литерами во всевозможных комбинациях. Будет и такой том, где мы найдем одни только точки; другой - с одними лишь вопросительными знаками.

- Но эти бессодержательные томы можно ведь будет сразу же разыскать и отобрать, - сказал Буркель.

- Пожалуй. Гораздо хуже будет, если нападешь на том, по-видимому, вполне разумный. Хочешь, например, навести справку в «Фаусте» и берешь том с правильным началом. Но прочитав немного, находишь дальше что-нибудь в таком роде: «Фокус-покус, во - и больше ничего», или просто: «ааааааа…». Либо следует дальше таблица логарифмов, неизвестно даже - верная или неверная. Ведь в библиотеке нашей будет не только все истинное, но и всякого рода нелепости. Заголовкам доверяться нельзя. Книга озаглавлена, например, «История тридцатилетней войны», а далее следует: «Когда Блюхер при Фермопилах женился на дагомейской королеве»…

- О, это уж по моей части! - воскликнула племянница. - Такие тома я могла бы сочинить.

- Ну, в нашей библиотеке будут и твои сочинения, все, что ты когда-либо говорила, и все, что скажешь в будущем.

- Ах, тогда уж лучше не устраивай твоей библиотеки…

- Не бойся: эти сочинения твои появятся не за одной лишь твоей подписью, но и за подписью Гете и вообще с обозначением всевозможных имен, какие только существуют на свете. А наш друг-журналист найдет здесь за своей ответственной подписью статьи, которые нарушают все законы о печати, так что целой жизни не хватит, чтобы за них отсидеть. Здесь будет его книга, в которой после каждого предложения заявляется, что оно ложно, и другая его книга, в которой

после тех же самых фраз следует клятвенное подтверждение их истинности.

- Ладно, - воскликнул Буркель со смехом. - Я так и знал, что ты меня подденешь. Нет, я не абонируюсь в библиотеке, где невозможно отличить истину от лжи, подлинного от фальшивого. Миллионы томов, притязающие на правдивое изложение истории Германии в XX веке, будут все противоречить один другому. Нет, благодарю покорно!

- А разве я говорил, что легко будет отыскивать в библиотеке все нужное? Я только утверждал, что можно в точности определить число томов нашей универсальной библиотеки, где на ряду со всевозможными нелепостями будет также вся осмысленная литература, какая только может существовать.

- Ну, подсчитай же, наконец, сколько это составит томов, - сказала хозяйка. - Чистый листок бумаги, я вижу, скучает в твоих пальцах.

- Расчет так прост, что его можно выполнить и в уме. Как составляем мы нашу библиотеку? Помещаем сначала однократно каждую из сотни наших литер. Затем присоединяем к каждой из них каждую из ста литер, так что получаем сотню сотен групп из двух букв. Присоединив в третий раз каждую литеру, получаем 100 x 100 x 100 групп из трех знаков, и т. д. А так как мы должны заполнить миллион мест в томе, то будем иметь такое число томов, какое получится, если взять число 100 множителем миллион раз. Но 100 = 10x10; поэтому составится то же, что и от произведения двух миллионов десятков. Это, проще говоря, единица с двумя миллионами нулей. Записываю результат так; десять в двухмиллионной степени -

$10^{2000000}$.

Профессор поднял руку с листком бумаги[31].

- Да, вы, математики, умеете-таки упрощать свои записи, - сказала хозяйка. - Но напиши-ка это число полностью.

- О, лучше и не начинать: пришлось бы писать день и ночь две недели подряд, без передышки. Если бы его напечатать, оно заняло бы в длину четыре километра.

- Уф! - изумилась племянница. - Как же оно выговаривается?

- Для таких чисел и названий нет. Никакими средствами невозможно сделать его хоть сколько-нибудь наглядным - настолько это множество огромно, хотя и безусловно конечно. Все, что мы могли бы

назвать из области невообразимо больших чисел, исчезающе мало рядом с этим числовым чудовищем.

- А если бы мы выразили его в триллионах? - спросил Буркель.

- Триллион - число внушительное: единица с 18 нулями. Но если ты разделишь на него число наших томов, то от двух миллионов нулей отпадает 18. Останется единица с 1999982-мя нулями, - число столь же непостижимое, как и первое. Впрочем… - профессор сделал на листке бумаги какие-то выкладки.

- Я была права: без письменного вычисления не обойдется, - заметила его жена.

- Оно уже кончено. Могу теперь иллюстрировать наше число. Допустим, что каждый том имеет в толщину 2 сантиметра и все тома расставлены в один ряд. Какой длины, думаете вы, будет этот ряд?

Он с торжеством взирал на молчащих собеседников. Последовало неожиданное заявление племянницы:

- Я знаю, какую длину займет ряд. Сказать?

- Конечно.

- Вдвое больше сантиметров, чем томов.

- Браво, браво! - подхватили кругом. - Точно и определенно!

- Да, - сказал профессор, - но попытаемся представить это наглядно. Вы знаете, что свет пробегает в секунду 300000 километров, т. е. в год 10 биллионов километров, или триллион сантиметров. Если, значит, библиотекарь будет мчаться вдоль книжного ряда с быстротой света, то за два года он успеет миновать всего только один триллион томов. А чтобы обозреть таким манером всю библиотеку, понадобилось бы дважды 1999982 года. Вы видите, что даже число лет, необходимое для обозрения библиотеки, столь же трудно себе представить, как и число самих томов. Здесь яснее всего сказывается полная бесполезность всяких попыток наглядно представить себе это число, хотя, повторяю, оно и конечно.

Профессор хотел было уже отложить листок, когда Буркель сказал:

- Если собеседницы наши не запротестуют, я позволю себе задать еще только один вопрос. Мне кажется, что для придуманной тобой библиотеки не хватит места в целом мире.

- Это мы сейчас узнаем, - сказал профессор и снова взялся за карандаш. Сделав выкладки, он объявил:

- Если нашу библиотеку сложить так, чтобы каждые 1000 томов

заняли один кубический метр, то целую вселенную, до отдаленнейших туманностей, пришлось бы заполнить такое число раз, которое короче нашего числа томов всего лишь на 60 нулей[32]. Словом, я был прав: никакими средствами невозможно приблизиться к наглядному представлению этого исполинского числа.

Примечания редактора

Примечание 1. Это поражающее вычисление нередко фигурирует в книгах по теории вероятности. Французский математик Э. Борель в своей известной книге «Случай» придает ему следующую форму:

Предположим, что число знаков, употребляемых в письме, считая также знаки препинания и т. п., равняется 100; книга среднего размера содержит менее миллиона типографских знаков. Спрашивается, какова вероятность вынуть целую книгу, выбирая наудачу по одной букве?

Очевидно, вероятность того, чтобы вынутая буква была первой буквой книги, равна 1/100; она также равна 1/100 для того, чтобы вторая вынутая буква была второй буквой книги; а так как эти две вероятности независимы, то вероятность, что случатся оба события, равна

$$\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}=\left(\frac{1}{100}\right)^2.$$

То же самое рассуждение можно повторить и для третьей буквы, для четвертой и т. д. Если их миллион, то вероятность, что случай даст именно их, равна произведению миллиона множителей, из которых каждый равен одной сотой; оно равно

$$\left(\frac{1}{100}\right)^{1000000}=10^{-2000000}.$$

Примечание 2. В этом расчете нет преувеличения: он вполне точен для тех представлений о размере вселенной, которые господствовали в момент написания рассказа. Интересно повторить вычисление, исходя из современных представлений.

Согласно новейшим исследованиям астронома Кертиса, самые

далекие объекты вселенной - спиральные туманности - расположены от нас на расстоянии 10 миллионов световых лет. Световой год, т. е. путь, проходимый светом в течение года, равен, круглым числом, 10 биллионам километров, т. е. 10^{13} км. Следовательно, радиус видимой вселенной мы можем считать равным

$10^{13} \times 10^{7} = 10^{20}$ километров,

или

$10^{20} \times 1000 = 10^{23}$ метров.

Объем такого шара в кубич. метрах равен

$^{4}/_{3} (10^{23})^{3}$ = около 4×10^{69} куб. метров.

Считая по 1000 томов в куб. метре объема, узнаем, что вселенная указанных размеров могла бы вместить только

$4 \times 10^{69} \times 1000 = 4 \times 10^{72}$ томов.

Следовательно, разделив все число томов «универсальной библиотеки» на это число, мы сократили бы ряд нулей на 73; разница между этим результатом и приведенным в рассказе, как видим, несущественна.

Литературная машина

Поучительно рассмотреть проект видоизменения идеи Лассвица, сущность которого ясна из следующего воображаемого разговора:

- В том виде, какой Лассвиц придал своей идее «универсальной библиотеки», она, конечно, неосуществима. Слишком уж велик размах: перебирать все комбинации из миллиона типографских знаков! Неудивительно, что получаются сверхастрономические числа. Другое дело - если ограничиться гораздо более скромными рамками.

- Например?

- Например, удовольствовавшись комбинациями всего лишь из 1000 литер, среди которых сто различных. Вообразим механизм, который систематически составляет все сочетания, возможные при наборе отрывка в 1000 литер. С каждого сочетания делаются оттиски. Что же мы получим?

- Ясно что: всевозможные образчики вздора и бессмыслицы.

- Да, но в этом море бессмыслицы неизбежно должны оказаться и все осмысленные сочетания литер. Это тоже ясно. Значит, у нас в руках очутятся все литературные отрывки, какие мыслимо написать тысячью литер. А именно: по отдельным страницам, по полустраницам будем мы иметь все, что когда-либо было написано и когда-либо будет написано в прозе и стихах на русском языке и на всех существующих и будущих языках (потому что всякое иностранное слово можно ведь передать буквами русского алфавита). Все романы и рассказы, все научные сочинения и доклады, все журнальные и газетные статьи и известия, все стихотворения, все разговоры, когда-либо веденные всеми населяющими земной шар людьми и всеми прежде жившими (в том числе и наш нынешний разговор с вами), все интимные тайны, когда-либо кем-либо кому-либо доверенные, и все, что еще предстоит придумать, высказать и написать людям будущих поколений по-русски и в переводе на все языки - все это без исключения будет в наших оттисках.

- Бесспорно так. Не забывайте, однако, что мы будем иметь разрозненные, беспорядочно перемешанные отрывки. Придется их еще подобрать и сопоставить.

- Конечно. Будет немало работы по отыскиванию разрозненных частей. Но эта работа сторицей окупится ценностью ее результата. Подумайте: без гениев искусства и науки, чисто механическим путем, мы получим величайшие произведения мировой литературы и науки, овладеем всеми будущими открытиями и изобретениями.

- Но как же это осуществить? Как устроить вашу «литературную машину»?

- Тут-то и сказывается огромное преимущество моего проекта перед проектом Лассвица. Уменьшив число литер в 1000 раз, заменив толстый том одной страничкой малого формата, я достиг технической осуществимости этой замечательной идеи. То, что немыслимо сделать при миллионе литер, вполне возможно выполнить для тысячи.

- А именно?

- Довольно просто. Вообразите шестеренку, на ободе которой помещаются 100 необходимых нам литер. Высота и ширина литеры, скажем для простоты, 2 миллиметра. Окружность шестеренки в 2 х 100, т. е. в 200 миллиметров, имеет диаметр меньше 7 сантиметров. Толщина шестеренки может быть немного шире литеры - ну, пусть в 4 мм. Вообразите 1000 таких шестеренок, насаженных рядом на одну общую ось. Получите вал длиною 4 метра и толщиною 7 см. Шестеренки соединены между собою так, как это делается в нумераторах и в счетных машинах, а именно: при полном повороте первой шестеренки - вторая повертывается на одну литеру, при полном повороте второй - третья повертывается на одну литеру, и так до последней 1000-й шестеренки. Валик покрывается типографской краской и делает оттиски на длинной 4-метровой бумажной полосе. Вот и все устройство «литературной» машины. Как видите, просто и нисколько не громоздко.

- Как же она работает?

- Шестеренки приводятся во вращение, как я уже сказал, последовательно. Сначала начинает вращаться первая и дает на бумаге оттиски своих литер - это первые 100 «литературных произведений» категории бессмысленных. Когда она обернется один раз, она вовлекает во вращение вторую шестеренку: та повертывается на одну литеру и остается в этом положении, пока первая продолжает вращаться; получите еще 100 оттисков, теперь уже из двух букв. После 100 таких оборотов вторая шестеренка повертывается еще на одну литеру, опять обе дают 100 новых оттисков, и т. д. Когда же и вторая сделает полный

оборот, присоединяется третья шестеренка и получаются всевозможные оттиски из трех литер. И так далее, пока не дойдет очередь до последней, 1000ной шестеренки. Вы понимаете, что когда эта 1000-ная шестеренка сделает полный оборот, все возможные комбинации в 1000 литер будут исчерпаны и останется лишь работа по разборке оттисков.

- Много ли времени потребует вся работа вашей машины?

- Времени, конечно, порядочно. Но простота конструкции моей машины дает возможность значительно сократить необходимое время. Ведь работа машины сводится ко вращению небольших шестерен, а скорость вращения можно технически довести до весьма высокой степени. Турбина Лаваля делает 30.000 оборотов в минуту. Почему бы и «литературную» машину не пустить таким темпом? Словом, как видите, у меня идея Лассвица получает конструктивное воплощение и притом в довольно простой форме - длинного ряда шестеренок, насаженных на одну ось и вращаемых с большою (но технически осуществимою) скоростью.

*** * ***

Что мы должны думать об этом проекте «литературной» машины?

То, что он так же несбыточен, как и первоначальный проект Лассвица. Соорудить и пустить в ход эту «литературную» машину вполне возможно, но дождаться конца ее работы человечество не сможет. Солнце погаснет, вселенная успеет миллионы раз погибнуть и возродиться, прежде чем последняя шестеренка закончит свое вращение. Действительно, при 30.000 оборотах в секунду

2-я шестеренка начнет работать спустя $\frac{60}{30000}=\frac{1}{500}$ мин.

3-я » » » » $\frac{60\times60}{30000}=\frac{3}{25}$ мин.

4-я » » » » $\frac{60\times60\times60}{30000}=7{,}2$ мин.

5-я » » » » $\frac{60^4}{30000}=7{,}2$ часа.

6-я » » » » $7{,}2\times60=18$ суток.

7-я » » » » 18 сут.×60=3 года*.

8-я » » » » 3 г.×60=180 лет.

9-я » » » » 180 л.×60=1080 лет.

10-я » » » » 1080 л.×60=64800 лет.

11-я » » » » 3888000 лет.

12-я » » » » 233280000 лет.

** Для удобства подсчета принимаем год равным 360 суткам.*

Надо ли продолжать? Если 12-я шестеренка начнет вращаться только через двести миллионов лет, то когда дойдет очередь до 1000-й? Нетрудно вычислить. Число минут выразится числом

$$\frac{60^{1000}}{3000}$$

- числом, в котором 1775 цифр. Во всей вселенной не хватит материи, чтобы дать материал для всех оттисков, число которых выражается 1779 цифрами. Ведь во вселенной, по подсчетам специалистов (де-Ситтера), «всего» 10^{77} электронов, и даже если бы каждый оттиск состоял из одного электрона, можно было бы отпечатать лишь ничтожную долю всей продукции «литературной» машины. Перерабатывать старые оттиски вновь на бумагу? Но допуская даже при этом ничтожнейшую потерю материи в 1 биллионную долю, мы должны были бы иметь - считая снова по электрону на оттиск - число оттисков из 1767 цифр, а электронов у нас имеется число всего из 78 цифр…

Но можно возразить, пожалуй, что незачем ждать окончания работы «литературной» машины: ведь шедевры литературы и замечательные открытия могут случайно оказаться среди первого миллиона оттисков. При невообразимо огромном числе всех возможных

сочетаний эта вероятность еще более ничтожна, чем вероятность случайно наткнуться на один определенный электрон среди всех электронов вселенной. Число электронов во вселенной неизмеримо меньше, чем общее число возможных оттисков нашей машины.

Но пусть даже осуществилось несбыточное, пусть случилось чудо, и в наших руках имеется сообщение о научном открытии, появившееся из-под машины без участия творческой мысли. Сможем ли мы этим открытием воспользоваться?

Нет, мы даже не сможем признать этого открытия. Ведь у нас не будет критерия, который позволил бы нам отличить истинное открытие от многих мнимых, столь же авторитетно возвещаемых в процессе работы нашей машины. Пусть, в самом деле, машина дала нам отчет о превращении ртути в золото. Наряду с правильным описанием этого открытия будет столько же шансов иметь множество неправильных его описаний, а кроме того, описаний и таких невозможных процессов, как превращение меди в золото, марганца в золото, кальция в золото и т. д. и т. д. Оттиск, утверждающий, что превращение ртути в золото достигается при высокой температуре, ничем не отличается от оттиска, предписывающего прибегнуть к низкой температуре, причем могут существовать варианты оттисков с указанием всех температур от минус 273° до бесконечности. С равным успехом могут появиться из-под машины указания на необходимость пользоваться высоким давлением (тысячи вариантов), электризацией (опять тысячи вариантов), разными кислотами (снова тысячи и тысячи вариантов) и т. п.

Как при таких условиях отличить подлинное открытие от мнимого? Пришлось бы тщательно проверять на опыте каждое указание (кроме, конечно, явно нелепых), т. е. проделать такую огромную лабораторную работу, которая совершенно обесценила бы всю экономичность идеи «литературной» машины.

Точно также пришлось бы проделать обширные исторические изыскания, чтобы проверить правильность каждого исторического факта, утверждаемого каким-нибудь продуктом механического производства открытий. Словом, в виду полной невозможности отличать истину от лжи, подобный «механический» способ двигать науку вперед был бы совершенно бесполезен, даже если бы каким-нибудь чудом удалось дождаться осмысленного оттиска.

Интересно отметить здесь следующий расчет Бореля (из книги

«Случай»): вероятность выпадения орла 1000 раз подряд при игре в орлянку равна $^1/_2$ 1000, т. е. числу, знаменатель которого содержит около 300 цифр. Этот шанс приблизительно таков же, как и шанс получить две первых строки определенного стихотворения, вынимая наудачу из шапки буквы по следующему способу: в шапке 25 букв, одна из них вынимается, записывается и кладется обратно в шапку; после встряхивания вынимается вторая, и т. д. Строго говоря, получить таким образом две первых строки определенного стихотворения вполне возможно. «Однако, - замечает Борель, - это представляется нам до такой степени маловероятным, что если бы подобный опыт удался на наших глазах, мы считали бы это плутовством»[33].

История одной игры

Вильгельма Аренса[34]

I

Около полувека назад - в конце 70-х годов, - вынырнула в Соединенных Штатах одна игра, «игра в 15»; она быстро распространилась по всему цивилизованному миру и, благодаря несчетному числу усердных игроков, которых она заполонила, превратилась в настоящее общественное бедствие, в истинный бич человечества. Заглавный рисунок, заимствуемый из одного американского сочинения, изображает эту игру: коробку с 15 шашками, перенумерованными от 1 до 15, и одним свободным полем. Перед ящиком мы видим жертву игорной страсти, одного из многочисленных одержимых этой манией; в разгар полевой работы, он, поддавшись внезапно приступу игорной лихорадки, кинулся на колени перед

демоном, которому поклонялся. Растерянность видна во всей его фигуре, во всех его чертах; лицо искажено отчаянием; правая рука нервно сжата в кулак; левая рука и наморщенный лоб охвачены судорогой. Кожа головы, после ряда усилий, скинула шляпу; волосы дико растрепаны. Забыт труд, покинута лошадь и плуг; на нем уселась пара птиц; даже заяц, обычно столь пугливый, сознает, что этот потерянный для мира маньяк, всецело погруженный в 15 шашек своей коробки, не представляет для него ни малейшей опасности.

То же наблюдалось и по эту сторону океана, в Европе. Здесь можно было даже в конках видеть коробочки с 15 шашками в суетливых руках, передвигавших шашки по разным направлениям. В конторах и торговых помещениях хозяева приходили в отчаяние от игорного увлечения своих служащих и вынуждены были строгими угрозами воспретить им игру в часы занятий и торговли. Оборотливые содержатели увеселительных заведений ловко использовали эту манию и устраивали у себя большие игорные турниры. Так описывает гамбургский математик Г. Шуберт зарождение игорной эпидемии в его городе.

Даже в торжественные залы германского рейхстага сумел проникнуть змий-искуситель. «Эта вещица поистине околдовывала. Как сейчас вижу я в рейхстаге седовласых людей, сосредоточенно рассматривающих в своих руках квадратную коробочку», - рассказывал, спустя десятилетия, известный географ и математик Зигмунд Гюнтер, бывший в годы игорной эпидемии депутатом рейхстага.

В Париже опасная игра нашла себе приют под открытым небом, на бульварах, и быстро распространилась из столицы по всей провинции[35]. Вскоре - говорят французские источники - не было в провинции ни одного уединенного сельского домика, где не угнездился бы этот паук, подстерегая жертву, готовую запутаться в его сетях. Настоящий бич человечества, - вот какой рисуется эта игра одному французскому автору: «бедствие, более страшное, чем табак и алкоголь», - восклицает он в комическом отчаянии.

В 1880 г. игорная лихорадка достигла, по-видимому, своей высшей точки. Вся пестрая, разноязычная литература, порожденная этой игрой, относится к немногим годам между 1879-м и 1883.

Вскоре после этого демон, тиранивший стольких людей, был повержен и побежден. Математика - вот его победительница, и победа не была для нее особенно трудной, между тем как «демон алкоголя и

табака» никогда, конечно, не будет следовать за ее триумфальной колесницей, сколько бы славы ни сулила победа над ним.

Когда демон был оружием математики повержен во прах, источник мучений столь многих и многих стал ясен для всех. Математическая теория игры обнаружила, что из многочисленных задач, которые могут быть предложены, только половина разрешима, между тем как другая не разрешима никакими ухищрениями.

Самуэль Лойд - популярнейший и плодовитейший в мире изобретатель головоломных задач и развлечений. Вел во многих американских журналах отдел головоломок, получая от решающих десятки тысяч ответов ежемесячно.

Стало ясно, почему иные задачи не поддавались самым упорным усилиям; стало ясно, почему устроители турниров отваживались назначать огромные премии за разрешение некоторых задач, и ни один из многочисленных соревнователей не смог овладеть ими.

В этом отношении всех превзошел сам изобретатель игры, предложивший издателю нью-йоркской газеты для воскресного прибавления неразрешимую задачу с премией в 1.000 долларов за ее разрешение; и так как издатель колебался, то изобретатель выразил полную готовность внести названную сумму из собственного кармана.

Мы до сих пор не назвали имени изобретателя: Самуэль (Сам) Лойд. Он родился в городе Филадельфии. В шахматных кругах он

приобрел широкую известность как составитель остроумных задач; кроме того, им придумано множество иных головоломок. Мы воспроизводим здесь портрет этого изобретательного человека. Любопытно, что ему не удалось получить в Америке патента на придуманную им игру. Хотя Лойд не мог предусмотреть чудовищного успеха своего изобретения и совершенно не ожидал его, он подал заявление о патенте. Согласно инструкции, он должен был представить «рабочую модель» для исполнения пробной партии; он предложил чиновнику патентного бюро неразрешимую задачу, и когда последний осведомился, разрешима ли она, изобретатель должен был ответить; «Нет, это математически невозможно». - «В таком случае, - последовало возражение, - раз задача не разрешима, то не может быть и рабочей модели, а без модели нет и патента». Странным образом Лойд удовлетворился этой мнимой логикой и этой удивительной резолюцией, - но, вероятно, был бы более настойчив, если бы хоть отчасти предвидел неслыханный успех своего изобретения.

II

Изобретенная в Америке, игра эта получила там и первую свою математическую теорию - в трудах американских математиков Вулсея Джонсона и Вильяма Сторна. Впрочем, независимо от них и вскоре вслед за ними развили основания этой теории также ряд других математиков в различных странах Европы.

Сейчас мы набросаем очерк этой теории, по крайней мере, в главных ее чертах. Задача игры состоит обыкновенно в том, чтобы посредством последовательных передвижений, допускаемых наличием одного свободного поля, перевести любое начальное расположение 15 шашек в нормальное, т. е. в такое, при котором шашки идут в порядке своих чисел: в верхнем левом углу 1, направо - 2, затем 3, потом в верхнем правом углу 4; в следующем ряду слева на право: 5, 6, 7, 8, и т. д. Такое нормальное конечное расположение мы даем здесь на чертеже (схема I).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Схема I.

Вообразите теперь любое начальное расположение шашек, т. е. такое, при котором 15 шашек размещены в пестром беспорядке. Нетрудно убедиться, что рядом передвижений всегда можно привести шашку № 1 на место, занимаемое ею на чертеже. Точно также возможно, не трогая шашки 1, привести шашку 2 на место рядом с ней, которое она занимает на схеме I. Затем, не трогая шашек 1 и 2, можно поместить шашки 3 и 4 на свои нормальные места: если они случайно не находятся в двух последних вертикальных рядах, то легко привести их в эту область и затем, рядом передвижений, достичь желаемого результата. Теперь весь верхний ряд 1, 2, 3, 4 приведен в порядок, и при дальнейших манипуляциях с шашками мы трогать этого ряда не будем. Таким же путем стараемся мы привести в порядок и вторую строку: 5, 6, 7, 8; легко убедиться, что это всегда достижимо. Далее, на пространстве двух последних рядов необходимо привести в нормальное положение (схемы I) шашки 9 и 13: это тоже всегда возможно, в чем нетрудно удостовериться. Из всех приведенных в порядок шашек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 13 ни одной не перемещают в дальнейшем; остается небольшой участок в 6 полей, в котором одно свободно, а пять остальных заняты шашками 10, 11, 12, 14, 15 в произвольном порядке. Легко, однако, убедиться, что в пределах этого шестиместного участка всегда можно привести на нормальные места шашки 10, 11, 12, и когда это достигнуто, то в последнем ряду шашки 14 и 15 окажутся размещенными либо в нормальном порядке либо в обратном (схема II). Таким путем, - который здесь был лишь намечен и который читатели легко могут испытать и проверить на деле, - мы приходим к следующему результату:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Схема II.

Любое начальное положение может быть приведено либо к нормальному схемы I, либо к конечному схемы II.

Это значительно упрощает задачу: все необозримое разнообразие положений шашек сведено к двум типичным схемам I или II, так что приходится иметь дело лишь с этими двумя. Если некоторое расположение, которое для краткости обозначим буквою S, может быть преобразовано в положение схемы I, то, очевидно, возможно и *обратное* - перевести положение схемы I в положение S. Ведь все передвижения шашек (все «ходы», как будем говорить кратко) несомненно обратимы: если, например, в схеме I мы можем шашку 4 поместить на свободное поле, то можно ход этот тотчас взять обратно противоположным движением. И если расположение переводится в расположение не схемы I, а схемы II, то соответственно этому расположение схемы II может быть переведено в расположение S.

Итак, мы имеем две серии расположений таких, что положения одной серии могут быть все переведены в «нормальное» I, а другой серии - в положение II. И наоборот, мы уже видели, что из «нормального» расположения можно получить любое положение первой серии, а из расположения схемы II - любое положение второй серии. Наконец, два любых расположения, принадлежащие к одной и той же серии, могут быть взаимно переводимы друг в друга: если оба относятся, например, к первой серии, то это значит, что одно из них может быть переведено в положение схемы I, а положение схемы I переводится в другое из данных двух положений; короче - одно данное положение переводимо в другое и наоборот.

Возникает вопрос: нельзя ли идти дальше и объединить эти два типичных расположения - схем I и II? Это было бы возможно, если бы одно из них переводилось каким-нибудь образом в другое. Тогда обе серии расположений естественно слились бы в одну. Сопоставляя друг с

другом расположения схем I и II, можно строго доказать (не станем входить здесь в подробности), что положения эти не могут быть превращены одно в другое никаким числом передвижений. Это - огонь и вода. Поэтому все огромное число размещений шашек распадается на две разобщенные серии: 1) на те, которые могут быть переведены в «нормальное» схемы I: это - положения *разрешимые;* 2) на те, которые могут быть переведены в положение схемы II и, следовательно, ни при каких обстоятельствах не переводятся в «нормальное» конечное расположение: это - положения *неразрешенные*, те именно, за разрешение которых тщетно назначались огромные премии.

Но как узнать, принадлежит ли заданное расположение к первой или второй серии? Пример разъяснит это.

Рассмотрим представленное здесь расположение.

1	2	3	4
5	6	7	9
8	10	14	12
13	11	15	

Схема III.

Первый ряд шашек в порядке, как и второй, за исключением последней шашки (9). Эта шашка занимает место, которое в «нормальном» расположении принадлежит 8. Шашка 9 стоит, значит, «ранее» 8; такое упреждение нормального порядка будем называть «инверсией». О шашке 9 мы скажем: здесь имеет место «одна инверсия». Рассматривая дальнейшие шашки, обнаруживаем упреждение для шашки 14; она поставлена на три места (шашек 12, 13, 11) ранее своего нормального положения; здесь у нас 3 инверсии (14 ранее 12; 14 ранее 13; 14 ранее 11). Всего мы насчитали уже 1 + 3 = 4 инверсии. Далее шашка 12 помещена ранее шашки 11, и точно так же шашка 13 - ранее шашки 11. Это дает еще 2 инверсии. Итого имеем таким образом 6 инверсий. Подобным образом для каждого заданного расположения устанавливают «общее число инверсий», освободив предварительно последнее место в правом нижнем углу. Если общее число инверсий, как в рассмотренном случае, *четное*, то заданное расположение может быть приведено к *«нормальному»* конечному;

другими словами, оно принадлежит к разрешимым. Если же число инверсий *нечетное*, то данное расположение принадлежит ко второй серии, т. е. к неразрешимым.

Из-за недостатка места мы должны отказаться от строгого доказательства всего изложенного. Но можно наметить кратко главные этапы в ходе этого доказательства. Среди ходов будем различать «горизонтальные» и «вертикальные» (смысл этих слов, конечно, ясен). Легко видеть, что всякий «вертикальный» ход изменяет число инверсий либо на 1, либо на 3, т. е. на нечетное число. Чтобы одно положение шашек перевести в какое-либо другое, необходимо сделать *h* горизонтальных и вертикальных ходов, причем - если в обоих положениях свободное поле находится в правом нижнем углу, - оба числа, *h* и четные. Горизонтальные ходы не могут изменить инверсий, вертикальные же изменяют его каждый раз на нечетное число, т. е. в общем итоге - так как число четное - на четное число. Вот почему для переводимости двух расположений (в которых пустое поле находится в правом нижнем углу) одного в другое необходимо, чтобы они различались между собою *четным* числом инверсий. Это условие взаимного перевода является притом не только необходимым, но, очевидно, также и достаточным. «Нормальное» расположение имеет 0 инверсий, и, следовательно, ему соответствует серия положений с четным числом инверсий (при условии, что свободное поле на одном и том же месте). Расположение II имеет одну инверсию, - ее серия есть серия *нечетных* инверсий.

Поучительной в этой игре является и ее история. При своем появлении игра вызвала всюду, как мы уже рассказали, сильнейшее, прямо лихорадочное возбуждение и породила настоящую манию игры. С этой лихорадкой удалось справиться только математике. И удалось ей это так полно, что в наши дни подобная страстность в этой игре уже совершенно немыслима. Победа достигнута была благодаря тому, что математика создала исчерпывающую теорию игры, теорию, не оставляющую в ней ни одного сомнительного пункта и превратившую ее в образчик настоящей математической игры. Исход игры зависит здесь не от каких-либо случайностей и даже не от исключительной находчивости, как в других играх, а от чисто математических факторов, предопределяющих исход с безусловной достоверностью[36].

Примечания редактора

Иллюстрация, приведенная в начале этой статьи, помещена в любопытной книге Сама Лойда «Энциклопедия головоломок» (Нью-Йорк, 1914). Это большой том, заключающий 5000 разнообразных задач и развлечений, из которых тысяча иллюстрирована. Рисунок интересующей нас игры сопровождается следующим текстом: «Давнишние обитатели царства смекалки помнят, как в начале 70-х годов я заставил весь мир ломать голову над коробкой с подвижными шашками, получившей известность под именем «игры в 14-15». Пятнадцать шашек были размещены в квадратной коробочке в правильном порядке, и только шашки 14-я и 15-я были переставлены, как показано на прилагаемой иллюстрации. Задача состояла в том, чтобы последовательно передвигая шашки, привести их в исходное положение, причем, однако, порядок шашек 14-й и 15-й должен быть исправлен».

Премия в 1000 долларов, предложенная за первое правильное решение этой задачи, никем не была заслужена, хотя тысячи людей уверяли, что выполнили требуемое. Все принялись без устали решать эту задачу. Рассказывали забавные истории о торговцах, забывавших из-за этого открывать свои магазины, о почтенных чиновниках, целые ночи напролет простаивавших под уличным фонарем, отыскивая путь к решению. Непостижимой особенностью игры было то, что никто не желал отказываться от поисков решения, так как все чувствовали уверенность в ожидающем их успехе. Штурмана, говорят, из-за игры садили на мель свои суда, машинисты проводили поезда мимо станций, торговля была деморализована. Фермеры забрасывали свои плуги, и один из таких моментов изображен на прилагаемой иллюстрации.

Вот несколько новых задач, кроме той, которая приведена выше:

Задача 2-я. Исходя из расположения, показанного на схеме II, привести шашки в правильный порядок, но со свободным полем в левом верхнем углу (см. чертеж).

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

К задаче 2-й.

Задача 3-я. Исходя из расположения схемы II, поверните коробку на четверть оборота и передвигайте шашки до тех пор, пока они не примут расположения чертежа.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

К задаче 3-й.

Задача 4-я. Передвижением шашек превратите коробку в «магический квадрат», а именно, разместите шашки так, чтобы сумма чисел была во всех направлениях равна 30.

РЕШЕНИЯ

Расположение зад. 2-й может быть получено из начального положения следующими 44 ходами.

14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7,
4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9,
12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13,
9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14,
10, 6, 2, 1.

Расположение зад. 3 достигается следующими 39 ходами:

14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9,
5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13,
9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14,
13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

Магический квадрат с суммою 30 получается ряда ходов:
12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15,
14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8,
4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6,
5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13,
14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

Приведем замечание немецкого математика Шуберта о числе возможных задач при «игре в 15».

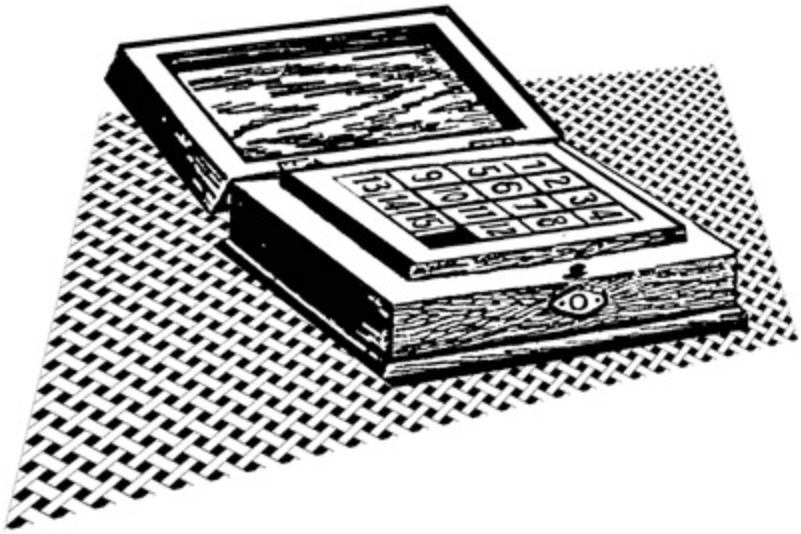
«Сколько всего возможно задач; т. е. сколько различных расположений можно дать 15 шашкам, причем каждый раз пустое поле расположено справа внизу? Чтобы определить, сколько перестановок можно получить с помощью 15 предметов, начнем с 2-х предметов: a и b. Они могут дать лишь две перестановки, именно - ab и Ьа. При трех предметах имеется уже втрое больше перестановок, т. е. 6, так как предмет а может быть поставлен перед Ьс и перед cb, и кроме того, имеются еще две перестановки, начинающиеся с b, и две начинающиеся с с. Отсюда можно заключить, что четыре предмета a, b, c, d могут дать вчетверо большее число различных перестановок, т. е. 4x3x2 = 24 перестановки. Продолжая так, можно найти, что 15 шашек допускают всего

2x3x4x5x6x7x8x9x10x11x12x13x14x15

перестановок. Вычислив это произведение, мы найдем для числа задач игры внушительное число:

1 биллион 307674 миллиона 368000».

Из этого огромного числа задач ровно половина принадлежит к разрешимым и столько же - к неразрешимым. Заметим еще, что если бы возможно было ежесекундно давать шашкам новое положение, то чтобы перепробовать всевозможные расположения, потребовалось бы, при непрерывной работе круглые сутки, - свыше 40.000 лет.



Странная задача на премию

Проф. Г. Симона

Ряд лет тому назад в Берлине подвизался искусный счетчик, предлагавший публике такую задачу (переделываем ее на русский лад):

«Кто сможет уплатить 5 рублей, 3 рубля или 2 рубля полтинниками, двугривенными и пятаками, всего 20-ю монетами, - тому будет выдано наличными деньгами сто рублей».

Посетителям вручались необходимые монеты, - конечно, заимообразно. Но обещанная сотня рублей должна была остаться навсегда в руках счастливца, которому удалось бы решить задачу.

Разумеется, пол-Берлина потело над разрешением этой задачи (стояли как раз жаркие июльские дни), казавшейся не особенно трудной. Сто рублей хорошо пригодились бы всем, значит - стоит потрудиться. По мере того, как выяснялась бесполезность попыток, физиономии решавших вытягивались и розовые мечты о заманчивой награде испарялись. Надежды оказывались обманчивыми. Ловкий счетчик мог безбоязненно обещать в десять раз большую награду. Никто не в праве был бы на нее притязать, ибо задача требует невозможного.

Как в этом убедиться?

Нам не понадобится глубоко забираться в дебри алгебры, но все же

не будем бояться x, y и z.

Рассмотрим сначала, можно ли уплатить требуемым образом пять рублей. Пусть для этого нужно x полтинников, y - двугривенных и z - пятаков. Сумма их должна составить 500 копеек, т. е.

$50x + 20y + 5z = 500,$

или, разделив на 5,

$10x + 4y + z = 100.$

Это легко осуществить на разные лады. Если, например, взять $x = 8$, то будем иметь

$80 + 4y + z = 100,$

или

$4y + z = 20;$

последнему уравнению можно удовлетворить, если принять $z = 4$, или 8, или 12, или 16 и, следовательно (при $z = 4$), $4y = 16$, $y = 4$. Действительно, 8 полтинников, 4 двугривенных и 4 пятака составляют 500. Однако при этом не выполнено условие употребить в общей сложности 20 монет: мы употребили $8 + 4 + 4 = 16$ монет. К нашему первому уравнению

$10x + 4y + z = 100$

необходимо, следовательно, присоединить второе

$x + y + z = 20.$

Соединяя их в одно, посредством вычитания второго из первого, мы освобождаемся от z и получаем

$9x + 3y = 80;$

теперь сразу становится очевидным, что не может быть таких целых чисел, которые удовлетворили бы этому уравнению. Потому что 9 раз x, каково бы ни было x, есть непременно число кратное 3; то же верно для числа 3y; следовательно, сумма $9x + 3y$ должна делиться без остатка на 3, то есть никак не может равняться 80.

Задача приводит к противоречивому требованию, и значит - ее решение невозможно.

Совершенно так же невозможно и составление требуемым образом сумм в 3 рубля и в 2 рубля. В первом случае, как каждый легко может убедиться, получается уравнение:

$9x + 3y = 40;$

во втором:

$9x + 3y = 20.$

Оба равенства невозможны, так как ни 40, ни 20 не делятся без остатка на 3.

Сказанным задача собственно исчерпывается. Но поучительно присоединить к ней рассмотрение вопроса, какие же суммы можно этими 20-ю монетами в самом деле уплатить, - разумеется так, чтобы получилось целое число рублей.

Если обозначим это число рублей через т, то у нас будет уравнение

$50x + 20y + 5z = 100m,$

или

$10x + 4y + z = 20m,$

при условии, что

$x + y + z = 20,$

откуда путем вычитания имеем:

$9x + 3y = 20m-20 = 20 (m-1).$

Так как $9x + 3y$ кратно 3, то и $20 (m-1)$ должно быть кратно 3.

Но 20 не делится на 3, так что кратным 3 должно быть только m-1.

Если m-1 равно 0, 3, 6, 9, 12 и т. д., то т должно быть на 1-цу больше, т. е. одно из чисел: 1, 4, 7, 10, 13 и т. д. Только такие суммы рублей могут быть уплачены нашими 20-ю монетами. Но очевидно, что 10 рублей - наибольшая сумма, так как 20 полтинников составляют уже 10 рублей. Принимая поэтому только четыре возможных суммы - в 1 р., в 4 р., в 7 р. и в 10 р., имеем четыре случая:

$9x + 3y-20(m-1) = 0$, или 60, или 120, или 180,

другими словами

$3x + y = 0$, или 20, или 40, или 60.

Только эти случаи и надо рассмотреть.

1) Один рубль. $3x + y = 0.$

Это равенство возможно лишь тогда, когда и x, и y равны нулю, так как, приняв для них даже наименьшее целое число 1, получим 4, а не 0. Единственное решение для этого случая, следовательно, есть $x = 0$, $y = 0$, а потому $z = 20$, то есть один рубль можно уплатить, только употребив 20 пятаков.

Рассмотрим теперь другой крайний случай:

2) Десять рублей. $3x + y = 60.$

Так как y должно быть кратно 3 (иначе сумма его с 3x не делилась бы без остатка на 3), то примем $y = 0, 3, 6…$ Для случая $y = 0$ имеем $x = 20$ и $z = 0$. Это дает нам уже упомянутое решение: 20 пятаков. Но оно и

единственное, потому что для y = 3 имеем x = 19, и x + y превышает высшую сумму 20.

3) Четыре рубля. 3x + y = 20.

Принимая

x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8…,

получаем, что

y = 20-3x = 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4…

Имеют смысл, очевидно, только первые семь значений. Им соответствуют

z = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12.

Четыре рубля можно, как видим, уплатить 7-ю различными способами, например: 6 полтинниками, 2 двугривенными и 12 пятаками.

4) Семь рублей. 3x + y = 40.

Здесь не приходится рассматривать значения для x от 0 до 9, так как при этом для y получаются числа от 40 до 13, и x + y составляет по меньшей мере 22, что нарушает требование. Остается рассмотреть поэтому лишь случаи:

x = 10, 11, 12, 13,

причем

y = 40-3x = 10, 7, 4, 1,

z = 0, 2, 4, 6.

Остальные случаи исключаются, так как ближайшее y уже отрицательное.

Этим вопрос исчерпывается полностью. Кто хотя немного имел дело с уравнениями, тот заметил, вероятно, что здесь не приходится оперировать так механически, как обычно. Это от того, что мы имеем в нашем случае больше неизвестных, нежели уравнений, а именно - 3 неизвестных при 2 уравнениях. Неизвестное z мы устранили и получили одно уравнение с двумя неизвестными x и y. Поэтому задача становится неопределенной; можно лишь установить взаимную обусловленность чисел x и y, так что для любого x можно найти соответствующее значение y. В сущности, имеется бесконечное множество пар решений задач такого рода. Но число их ограничивается требованием, вытекающим из сущности задачи, а именно: либо чтобы искомые числа были целые (как в нашей задаче, где речь идет о монетах), либо чтобы они не были отрицательные (наш случай), либо чтобы их сумма не превышала определенного числа (у нас - 20-ти), и т. п.

Итак, возвращаясь к первоначальной задаче, скажем: счетчик мог безопасно посулить сколь угодно большую награду - задача неразрешима. Для вас тем самым открывается легкая возможность предлагать своим друзьям крепкие головоломки. Можете обещать им величайшую награду - не попадетесь: как истые математики, вы можете быть твердо уверены в себе. А кто пожелал бы узнать подробнее об уравнениях в роде рассмотренных выше, - пусть спросит своего учителя математики о Диофанте Александрийском.

Примечание редактора

ДИОФАНТ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

Упомянутый в конце очерка александрийский математик Диофант жил в III веке нашей эры. Им написана была «Арифметика», от которой до нас дошла только первая половина сочинения. В этом труде рассматриваются, между прочим, неопределенные уравнения, которые Диофантом и были впервые введены в математику; поэтому имя его осталось навсегда связанным с этими уравнениями.

О жизни Диофанта известно лишь то, что сообщается в надписи, сохранившейся на его могильном памятнике, - надписи, которая составлена в форме следующей задачи:

Путник! Здесь прах погребен Диофанта. И числа поведать Могут, о чудо, сколь долог был век его жизни. Часть шестую его составляло прекрасное детство; Двенадцатая часть протекла еще жизни, - покрылся Пухом тогда подбородок; седьмую в бездетном Браке провел Диофант. Еще пять прошло лет - Был осчастливлен рожденьем прекрасного первенца-сына, Коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой Дал на земле по сравненью с отцом. В печали глубокой Старец земного удела конец воспринял, переживши Года четыре с тех пор, как сына лишился. Скажи, Скольких лет жизни достигнув, смерть воспринял

Диофант?

Составив уравнение:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x,$$

узнаем из его решения (x = 84), что Диофант умер 84 лет, женился 21 года, стал отцом на 38 году и потерял сына на 80-м году.

Числовые анекдоты

Барри Пэна[37]

1

- Еще веревочку? - спросила мать, вытаскивая руки из лоханки с бельем. - Можно подумать, что я вся веревочная. Только и слышишь: веревочку да веревочку. Ведь я вчера дала тебе порядочный клубок. На что тебе такая уйма? Куда ты ее девал?

- Куда девал бечевку? - отвечал мальчуган. - Во-первых, половину ты сама же взяла обратно…

- А чем же прикажешь мне обвязывать пакеты с бельем?

- Половину того, что осталось, взял у меня Том, чтобы удить в канаве колюшек, хотя там и нет никаких колюшек.

- Старшему брату ты всегда должен уступать.

- Я и уступил. Осталось совсем немного, да из того еще папа взял половину для починки подтяжек, которые лопнули у него от смеха, когда случилась беда с автомобилем. А после понадобилось еще сестре взять две пятых оставшегося, чтобы завязать свои волосы узлом…

- Что же ты сделал с остальной бечевкой?

- С остальной? Остальной-то было всего-навсего 30 сантиметров. Вот и устраивай телефон из такого обрывка!

Какую же длину имела бечевка первоначально?

2

Снимая наколенники, спортсмен спросил веселого малого, считавшего очки:

- Сколько у меня, Билл?

- А вот сколько: часы только что пробили по одному разу на каждую пару ваших очков, - затараторил веселый малый. - А если бы у вас было вдвое более того, что у вас есть, то имелось бы у вас втрое против того, что пробьют часы при следующем бое.

Спрашивается: который был час в начале этого разговора?

3

В воскресенье был устроен в школе детский праздник под открытым небом. Пора было звать ребят к чаю. У палатки, где предполагалось устроить чаепитие, стоял пирожник и заведующий школой. Пирожник был полный мужчина, потому что, по роду своей профессии, питался главным образом остатками пирожных. Заведующий был высок и тонок.

- Да, - сказал пирожник, - будь у нас еще пяток стульев, я мог бы накормить всю компанию в три очереди, по равному числу ребят в каждой. Надо будет поискать, нельзя ли промыслить здесь пять стульев или табуретов.

- Не беспокойтесь, - ответил заведующий, - я распределю их на четыре очереди, в каждой поровну.

- О, тогда на каждую партию придется еще по три лишних стула.

Сколько было детей и сколько стульев?

4

- Зайдите ко мне завтра днем на чашку чая, - сказал старый доктор своему молодому знакомому.

- Благодарю вас. Я выйду в три часа. Может, и вы надумаете прогуляться, так выходите в то же время. Встретимся на полпути.

- Вы забываете, что я старик, шагаю в час всего только 3 километра, а вы, молодой человек, проходите, при самом медленном шаге, 4 километра в час. Не грешно бы дать мне немного вперед.

- Справедливо. Так как я прохожу больше вас на 1 километр в час, то, чтобы уравнять нас, я и дам вам этот километр, т. е. выйду на четверть часа раньше. Достаточно?

- Даже очень мило с вашей стороны, - поспешил согласиться старик.

Молодой человек так и сделал: вышел из дому в три четверти третьего и шел со скоростью 4 километра в час. А доктор вышел ровно в три и делал по 3 километра в час. Когда они встретились, старик повернул обратно и направился домой вместе с молодым другом.

Только за чаем сообразил молодой человек, что с льготной четвертью часа вышло не совсем ладно. Он сказал доктору, что из-за этого ему придется в общем итоге пройти вдвое больше, чем доктору.

- Не вдвое, а вчетверо, - возразил доктор, и был прав. Как далеко от дома доктора до дома его молодого знакомого?

5

Возвратившись из театра, где ставили «Фауста», молодой бакалейщик плотно поужинал и лег спать. Возбуждение и переполненный желудок вызвали у него кошмар.

Приснилось ему, что он стоит за прилавком. На прилавке жестянка с чаем, весы и несколько листов оберточной бумаги. Гирь не было.

«Нечем отвешивать, - подумал бакалейщик. - Если забредет покупатель, придется его как-нибудь сплавить».

В ту же минуту появился Мефистофель в красном плаще, застегнутом огромной пряжкой.

- Отвесьте килограмм чаю! - грозно сказал он.

- Слушаюсь, сию минуту пришлем вам на дом… Славная погодка нынче, не правда ли? Тепло не по сезону.

- Нечего зубы заговаривать! - рявкнул Мефистофель. - Отвешивайте!

- Простите великодушно… Удивительное происшествие… никогда раньше не случалось… Все наши гири сейчас только отправлены в поверку.

- Вот оно что, - сказал Мефистофель. - А как чашки ваших весов: обе протекают или хоть одна может удержать воду?

- Правая сделана ковшиком, и в нее можно налить воды граммов триста или даже побольше. Левая - совсем плоская.

- Вот и отлично, - сказал Мефистофель, вынимая из под плаща бутылочку с водой. - В этой бутылочке (сколько она сама весит, я не знаю) ровно 300 граммов воды. Пряжка моего плаща весит 650 граммов. Берите бутылочку и пряжку и отвесьте мне ровно килограмм чаю. Килограмм чистого веса; бумага не в счет.

- Этого никак невозможно сделать, - начал было бакалейщик.

- Нет, возможно! - крикнул Мефистофель так грозно, что бакалейщик проснулся.

Когда он обдумал свой сон, ему стало ясно, что Мефистофель-то был прав: с 300 граммов воды и пряжкой в 650 граммов совсем нетрудно отвесить в точности 1 килограмм чаю.

Каким образом?

6

Старый Осип явился на базар с арбузами и начал торговать. Арбузы

были как на подбор все одинаковы.

Первый покупатель взял несколько арбузов, за которые торговец спросил по 36 копеек за штуку. Второй также купил несколько штук, за которые торговец взял по 32 копейки за штуку. Третьему покупка обошлась по 24 копейки штука.

Постовой милиционер, все время присматривавшийся к коммерческим оборотам торговца, также пожелал выступить в роли покупателя.

- Цена на арбузы, я вижу, падает, - сказал он. - У вас остался всего один последний арбуз. Что вы хотите за него?

- 48 копеек, - ответил торговец.

- Вот так раз! - с досадой воскликнул милиционер. - Почему это вы берете с меня дороже, чем со всех других?

- Я ни с кого не беру лишнего, - ответил торговец. - На всем базаре не найдете более добросовестного торговца. Для меня все покупатели равны, такое уж у меня правило. Хочу со всех нажить одинаково, много ли покупают или мало.

Сколько арбузов было у торговца?

7

Учительница задала двум ученицам один и тот же пример на умножение:

1 год 1 мес. 1 $^{1}/_{4}$ дня х 36.

Первая девочка умножила сначала на 9, а полученное произведение - на 4. Ответ получился правильный.

Вторая девочка умножила сначала на 4, а потом на 9 и тоже получила правильный ответ.

Учительница оценила обе работы одинаково. Если предполагать, что вторая девочка избрала свой путь решения вполне сознательно, то учительница поступила несправедливо, дав обеим ответам одинаковую оценку. Почему?

Добавление редактора

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1) После того, как мать взяла половину, осталась $^1/_2$, после заимствования старшего брата осталась $^1/_4$, после отца - $^1/_8$, после сестры - $^1/_8$ x $^3/_5$ = $^3/_{40}$. Если 30 сантиметров составляют $^3/_{40}$ первоначальной длины, то искомая длина равна 30: $^3/_{40}$ = 400 сантиметрам или 4 метрам.

2) Пусть часы пробили x. Наличное число очков надо обозначить через 2x. Если их было вдвое больше, т. е. 4x, то это число превышало бы втрое число ударов часов при последующем бое (т. е. x + 1). Следовательно, имеем уравнение $^{4x}/_3$ = x + 1, откуда x = 3. Было 3 часа.

3) Обозначим число наличных стульев через x. Тогда число учеников можно выразить двояко: через 3(x + 5) и через 4(x - 3). Оба выражения должны быть равны, откуда имеем уравнение

3 (x + 5) = 4 (x - 3).

Решив его, находим x = 27. Следовательно, стульев было 27, а учеников 3x(27 + 5) = 96.

4) Обозначим расстояние между домами через x. Молодой человек всего прошел 2x, а доктор вчетверо меньше, т. е. $^x/_2$. До встречи доктор прошел половину пройденного им пути, т. е. $^x/_4$, а молодой человек - остальное, т. е. $^{3x}/_4$. Свою часть пути доктор прошел в $^x/_{12}$ часов, а молодой человек - в $^{3x}/_{16}$ часов, причем мы знаем, что он был в пути на 1/4 часа дольше, чем доктор. Имеем уравнение:

$$\frac{3x}{16}-\frac{x}{12}=\frac{1}{4},$$

откуда x = 2,4 километра. Итак, от дома молодого человека до дома доктора - 2,4 километра.

5) Налив 300 граммов воды в чашку весов, отвешиваем этой

«водяной гирей» сначала 300 граммов чаю. Затем, положив на одну чашку весов эти 300 граммов чаю, кладем на другую - пряжку, т. е. 650 граммов, и досыпаем на менее нагруженную чашку в отдельный пакет столько чаю, чтобы весы пришли в равновесие, - то есть 350 г. Отвесив еще с помощью пряжки 650 г чаю, имеем 650 г + 350 г = 1000 г, т. е. 1 килограмм.

6) Обозначим себестоимость одного арбуза через x. Тогда чистая прибыль от продажи одного арбуза первой партии равна 36 - x, второй 32 - x, третьей 27 - x, наконец, последнего арбуза 48 - x. Так как чистая прибыль от продажи каждой партии одинакова, то число арбузов в первой партии должно равняться $^{(48-x)}/_{(36-x)}$, во второй $^{(48-x)}/_{(32-x)}$, в третьей $^{(48-x)}/_{(27-x)}$. Все эти выражения, согласно условию задачи, суть целые числа. Надо, следовательно, подобрать для x такое значение, при котором выражения

$$\frac{48-x}{36-x}, \frac{48-x}{32-x}, \frac{48-x}{27-x}$$

превращаются в целые числа. Нетрудно найти, путем нескольких испытаний, что этому условию удовлетворяет только x = 24. Тогда первое выражение равно 2, второе - 3, третье - 8. Другими словами, в первой партии было 2 арбуза, во второй 3, в третьей 8. Всего же арбузов было привезено торговцем 2 + 3 + 8 + 1 + 14.

7) Способ второй ученицы удобнее, так как при умножении 1 года 1 мес. 1 $^1/_4$ дней на 4 - мы сразу освобождаемся от дроби, и тогда умножение на 9 выполняется легче. Способ первой ученицы таких удобств не дает, он более громоздкий. Поэтому учительница должна была дать второму решению более высокую оценку.

Хитрое разрешение мудреной задачи

В. Г. Бенедиктова[38]

Одна баба, торговавшая яйцами, имея у себя к продаже девять десятков яиц, отправила на рынок трех дочерей своих и, вверив старшей и самой смышленной из них десяток, поручила другой 3 десятка, а третьей полсотни. При этом она сказала им:

- Условьтесь наперед между собой насчет цены, по которой вы продавать будете, и от этого условия не отступайтесь; все вы крепко держитесь одной и той же цены; но я надеюсь, что старшая дочь моя, по своей смышленности, даже и при общем между вами условии, по какой цене продавать, сумеет выручить столько за свой десяток, сколько вторая выручит за 3 десятка, да научит и вторую сестру выручить за ее 3 десятка столько же, сколько младшая выручит за полсотни. Пусть выручки всех троих да цены будут одинаковы. При том я желала бы, чтоб вы продали все яйца так, чтобы пришлось круглым счетом не меньше 10 копеек за десяток, а за все 9 десятков - не меньше 90 копеек, или 30-ти алтын.

Задача была мудреная. Дочери, идучи на рынок, стали между собой совещаться, при чем вторая и третья обращались к уму и совету старшей. Та, обдумав дело, сказала:

- Будем, сестры, продавать наши яйца не десятками, как это

делалось у нас до сих пор, а семерками: семь яиц - семерик; на каждый семерик и цену положим одну, которой все и будут крепко держаться, как мать сказала. Чур, не спускать с положенной цены ни копейки. За первый семерик алтын, согласны?

- Дешевенько, - сказала вторая.

- Ну, - возразила старшая, зато мы поднимем цену на те яйца, которые за продажею круглых семериков в корзинах у нас останутся. Я заранее проверила, что яичных торговок, кроме нас, на рынке никого не будет. Сбивать цены некому; на остальное же добро, когда есть спрос, а товар на исходе, известное дело, цена возвышается. Вот мы на остальных-то яйцах и наверстаем.

- А почем будем продавать остальные? - спросила младшая.

- По 3 алтына за каждое яичко. Давай, да и только. Те, кому очень нужно - дадут.

- Дорогонько, - заметила опять средняя.

- Что ж, - подхватила старшая; зато первые-то яйца по семеркам пойдут дешево. Одно на другое и наведет.

Согласились.

Пришли на рынок. Каждая из сестер села на своем месте отдельно и продает. Обрадовавшись дешевизне, покупщики и покупщицы бросились к младшей, у которой было полсотни яиц и все их расхватали. Семерым она продавала по семерику и выручила 7 алтын, а одно яйцо осталось у ней в корзине. Вторая, имевшая 3 десятка, продала 4-м покупательницам по семерику и в корзине у ней осталось два яйца: выручила она 4 алтына. У старшей купили семерик, за который она получила один алтын; 3 яйца осталось.

Вдруг явилась кухарка, посланная барыней на рынок с тем, чтобы купить непременно десяток яиц во что бы то ни стало. На короткое время к барыне в гости приехали сыновья ее, которые страшно любят яичницу. Кухарка туда-сюда по рынку мечется: яйца распроданы; всего у трех торговок, пришедших на рынок, осталось только 6 яиц: у одной - одно яйцо, у другой - 2, у третьей - 3. Давай и те сюда!

Разумеется, кухарка прежде кинулась к той, у которой осталось 3, а это была старшая дочь, продавшая за алтын свой единственный семерик. Кухарка спрашивает:

- Что хочешь за свои 3 яйца? А та в ответ:

- По три алтына за яичко.

- Что ты? С ума сошла! - говорит кухарка. А та:
- Как угодно, - говорит - ниже не отдам. Это последние.
Кухарка бросилась к той, у которой 2 яйца в корзине.
- По чем?
- По 3 алтына. Такая цена установилась. Все яйца вышли.
- А твое яичишко сколько стоит? - спрашивает кухарка у младшей.
Та отвечает:
- Три алтына.
Нечего делать. Пришлось купить по неслыханной цене.
- Давайте сюда все остальные яйца.

И кухарка дала старшей за ее 3 яйца - 9 алтын, что и составило с имевшимся у нее алтыном - 10; второй заплатила она за ее пару яиц - 6 алтын; с вырученными за 4 семерика 4-мя алтынами это составило также 10 алтын. Младшая получила от кухарки за свое остальное яичко - 3 алтына и, приложив их к 7-ми алтынам, вырученным за проданные прежде 7 семериков, увидела у себя в выручке тоже 10 алтын.

После этого дочери возвратились домой и отдав матери своей каждая свои 10 алтын, рассказали, как они продавали и как, соблюдая относительно цены одно общее условие, достигли того, что выручки как за один десяток, так и за три десятка и за полсотни, оказались одинаковыми.

Мать была очень довольна точным выполнением данного ею дочерям своим поручения и находчивостью своей старшей дочери, по совету которой оно выполнилось; а еще больше осталась довольна тем, что и общая выручка дочерей - 30 алтын, или 90 копеек - соответствовала ее желанию.

Примечание редактора

УВЕСЕЛИТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА В. Г. БЕНЕДИКТОВА

В библиотеке Русского Общества Любителей Мироведения, в Ленинграде, хранится найденная лишь в 1924 г. неопубликованная рукопись поэта В. Г. Бенедиктова, посвященная математическим развлечениям (поэт в последние годы жизни посвящал свой досуг занятиям математикой и астрономией).

Рукопись эта представляет собою, по-видимому, вполне законченное сочинение небольшого объема (около двух печатных листов) и является, по всем признакам, не переводом, а трудом вполне самостоятельным. На рукописи нет даты ее составления, но можно установить, что она относится к 1869-му году, за пять лет до смерти поэта. Указание это извлечено мною из данных одного расчета в последней главе рукописи, где автор говорит о 7376 годах, «насчитываемых от сотворения мира»; это соответствует, по церковному летоисчислению, 1868 году нашей эры.

Заглавие рукописи неизвестно, так как первый лист не сохранился. О характере же труда и его назначении говорится в кратком «вступлении» следующее:

«Арифметический расчет может быть прилагаем к разным увеселительным занятиям, играм, шуткам и т. п. Многие так называемые фокусы (подчеркнуто в рукописи) основываются на числовых соображениях, между прочим и производимые при посредстве обыкновенных игральных карт, где принимается в расчет или число самих карт, или число очков, представляемых теми или другими картами, или и то и другое вместе. Некоторые задачи, в решение которых должны входить самые громадные числа, представляют факты любопытные и дают понятие об этих превосходящих всякое воображение числах. Мы вводим их в эту дополнительную часть арифметики. Некоторые вопросы для разрешения их требуют особой изворотливости ума и могут быть решаемы, хотя с первого взгляда кажутся совершенно нелепыми и противоречащими здравому смыслу, как, например, приведенная здесь, между прочим, задача под заглавием: «хитрая продажа яиц». Прикладная, практическая часть арифметики требует иногда не только знания теоретических правил, излагаемых в чистой арифметике, но и находчивости, приобретаемой через умственное развитие при знакомстве с различными сторонами не только дел, но и безделиц, которым поэтому дать здесь место мы сочли не излишним».

Сочинение разбито на 20 коротких ненумерованных глав, имеющих каждая особый заголовок, - в стиле сходного по содержанию старинного труда Баше-де-Мезирьяка «Занимательные и приятные задачи», единственного сборника арифметических развлечений, с которым наш поэт мог быть знаком. Первые главы носят следующие заголовки: «Так называемые магические квадраты», «Угадывание задуманного числа от 1 до 30», «Угадывание в тайне распределенных сумм», «Задуманная в тайне цифра, сама по себе обнаруживающаяся», «Узнавание вычеркнутой цифры» и т. п. Затем следует ряд карточных фокусов арифметического характера. После них - любопытная глава «Чародействующий полководец и арифметическая армия» (оригинальный, незаимствованный сюжет); умножение с помощью пальцев, представленное в форме анекдота; перепечатанная нами выше задача с продажей яиц. Предпоследняя глава «Недостаток в пшеничных зернах для 64 клеток шахматной доски» рассказывает старинную легенду об изобретателе шахматной игры.

Наконец, 20-я глава: «Громадное число живших на земном шаре его обитателей» заключает очень любопытный подсчет. «Предположим, что первоначально от одной пары людей произошло две пары, что от каждой из этих пар произошло по две пары, и потом каждая пара производит две пары. По этому предположению размножение на земле людей шло в геометрической прогрессии: 1, 2, 4, 8, 16, 32… Возьмем столько членов этой прогрессии, сколько могло перейти человеческих поколений в течение 7376 лет, насчитываемых от сотворения мира [по библейскому исчислению; отсюда выясняется дата рукописи 1869 г.]. Положим на каждое поколение 50 лет». Насчитывая всех поколений, начиная от первой пары человеческих существ, 140 и беря 140 членов прогрессии, автор приходит к выводу, что число всех живших на земле людей достигает 4 септильонов. «Половину из этого числа отбросим, принимая в соображение, что многие из родившихся умирают в младенчестве… Значит, останемся только при двух септильонах». Септильоном Бенедиктов называет 1-цу с 42 нулями.

Далее, вес этого количества людей - «160 септильонов фунтов» - он сопоставляет с «весом» земного шара, который принимает в $3\ ^{1}/_{2}$ квадрильона фунтов (вместо 14 квадрильонов).

Результат получается поистине разительный: общий вес всех прежде живших людей превышает вес земного шара в 45 триллионов

раз. Исправленный расчет дал бы 10 триллионов, - что, конечно, мало меняет дело. «Это показывает, - заключает автор, - что один и тот же вещественный материал, из которого формировались телесные составы живших на свете людей, был в обороте по крайней мере 45 триллионов раз, и за каждую вещественную частицу, перебывавшую в различных живых человеческих телах, могли бы спорить 45 триллионов индивидуумов».

Результат этот станет еще более поразителен, если принять в расчет, что человечество существует на земном шаре не 7 тысяч лет, а около полумиллиона. Далее, надо иметь в виду, что не вся масса земного шара участвовала в «формировании телесных составов живших на свете людей», а только масса поверхностного слоя нашей планеты, составляющего незначительную часть всего объема Земли. Наконец, в споре за «каждую вещественную частицу, перебывавшую в живых телах», должно было предъявить свои права и бесчисленное множество животных, населявших нашу планету, начиная с древнейших геологических эпох…

Возвращаясь к рукописи, надо отметить еще, что в период ее составления (1869-й год) на русском языке не было еще ни одного сочинения подобного содержания, не только оригинального, но даже и переводного. Да и на Западе имелись только две старинных французских книги - Баше-де-Мезирьяка (1612 г.) и Озанама (1694 г. и ряд позднейших переизданий). По планировке и отчасти по содержанию сочинение Бенедиктова приближается к книге Баше.

Часть вторая
Занимательная арифметика

Предисловие

На русском языке имеется целый ряд оригинальных и переводных сборников[39], преследующих в общем ту же цель, что и настоящая книга: оживить школьную математику введением в нее интересных задач, занимательных упражнений, любопытных теоретических и практических сведений. Знакомым с этой литературой хорошо известно, что большинство подобных книг усердно черпают свой материал из одного и того же ограниченного фонда, накопленного столетиями; отсюда - близкое сходство этих сочинений, разрабатывающих, с различной детальностью, почти одни и те же темы. Но традиционный инвентарь математических развлечений достаточно уже исчерпан в нашей литературе. Новые книги этого рода должны привлекать новые сюжеты.

«Занимательная арифметика» представляет в большей своей части попытку предложить ряд новых, еще не разрабатывавшихся сюжетов арифметических развлечений. Подыскание новых тем в столь многосторонне обследованной области - дело нелегкое: составитель не может здесь пользоваться коллективным трудом длинного ряда известных и безызвестных собирателей, а предоставлен лишь собственным силам. Поэтому к «Занимательной арифметике», как к первому опыту обновления традиционного материала подобных сборников, не должна прилагаться слишком строгая мерка.

Другая особенность предлагаемого сборника та, что он ограничивается материалом чисто арифметическим, стремясь возможно теснее примкнуть к различным отделам школьной арифметики. Развлечения, хотя бы и занимательные, но не затрагивающие ни одного из ее отделов, не нашли себе места в книге.

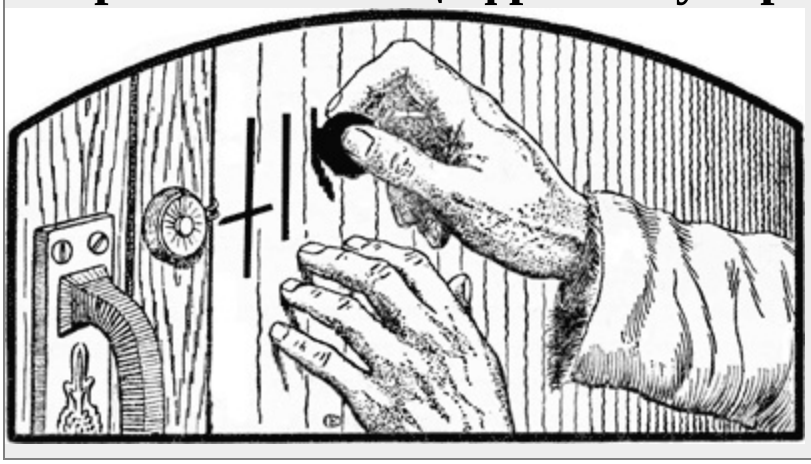
Наконец, заботясь о том, чтобы сборник читался легко, не требуя чрезмерного напряжения, составитель избегал трудных, запутанных вопросов и включал только такой материал, который вполне посилен для большинства читателей. Превращать приятную игру ума в утомительное занятие, чересчур серьезное для развлечения и слишком бесплодное для серьезной работы - значило бы извращать цель и смысл подобного рода литературы.

Хотя книга имеет в виду читателей, знакомых лишь с элементами арифметики, в ней найдутся страницы, небезынтересные, быть может, и для более сведущих. Усердная просьба к таким читателям - не отказать сообщить автору о замеченных ими недостатках книги[40]. За прежде сделанные указания автор приносит своим корреспондентам глубокую признательность.

Я. П.

Глава I

Старое и новое о цифрах и нумерации



Таинственные знаки

Задача № 1

В первые дни русской революции, в марте 1917 года, жители Ленинграда (тогда - Петрограда) были немало озадачены и даже встревожены таинственными знаками, появившимися, неизвестно как, у дверей многих квартир. Молва приписывала этим знакам разнообразные начертания. Те знаки, которые мне пришлось видеть, имели форму восклицательных знаков, чередующихся с крестами, какие ставились раньше возле фамилий умерших По общему убеждению, они ничего хорошего означать не могли и вселяли страх в растерянных граждан.

По городу пошли зловещие слухи. Заговорили о грабительских шайках, помечающих квартиры своих будущих жертв. «Комиссар города Петрограда», успокаивая население, утверждал, что «таинственные знаки, которые чьей-то невидимой рукой делаются на дверях мирных обывателей в виде крестов, букв, фигур, как выяснилось по произведенному дознанию, делаются провокаторами и германскими шпионами»; он приглашал жителей все эти знаки стирать и уничтожать,

«а в случае обнаружения лиц, занимающихся этой работой, задерживать и направлять по назначению».

Таинственные восклицательные знаки и зловещие кресты появились также у дверей моей квартиры и квартир моих соседей. Некоторый опыт в распутывании замысловатых задач помог мне, однако, разгадать нехитрый и нисколько не страшный секрет этой тайнописи.

Решение

Своим «открытием» я поспешил поделиться с согражданами, поместив в газете следующую заметку[41]:

«Таинственные знаки».

«В связи с таинственными знаками, появившимися на стенах многих петроградских домов, небесполезно разъяснить смысл одной категории подобных знаков, которые, несмотря на зловещее начертание, имеют самое невинное происхождение. Я говорю о знаках такого типа:

†!! ††!!!!! †††!!!

Подобные знаки замечены во многих домах на черных лестницах у дверей квартир. Обычно знаки этого типа имеются у всех дверей данного дома, причем в пределах одного дома двух одинаковых знаков не наблюдается. Их мрачное начертание, естественно, внушает тревогу жильцам. Между тем, смысл их, вполне невинный, легко раскрывается, если сопоставить их с номерами соответствующих квартир. Так, например, приведенные выше знаки найдены мною у дверей квартир № 12, № 25 и № 33:

†!! ††!!!!! †††!!!

12 25 33

Нетрудно догадаться, что кресты означают десятки, а палочки -

единицы; так оказалось во всех без исключения случаях, которые мне приходилось наблюдать. Своеобразная нумерация эта, очевидно, принадлежит дворникам-китайцам[42], не понимающим наших цифр. Появились эти знаки, надо думать, еще до революции, но только сейчас обратили на себя внимание встревоженных граждан».

Таинственные знаки такого же очертания, но только не с прямыми, а с косыми крестами были обнаружены и в таких домах, где дворниками служили пришедшие из деревень русские крестьяне. Здесь уже нетрудно было выяснить истинных авторов тайнописи, вовсе и не подозревавших, что их безыскусственные обозначения №-ров квартир только теперь были замечены и вызвали такой переполох.

Старинная народная нумерация

Откуда взяли ленинградские дворники этот простой способ обозначения чисел: кресты - десятки, палочки - единицы? Конечно, не придумали этих знаков в городе, а привезли их из родных деревень. Нумерация эта давно уже в широком употреблении и понятна каждому, даже неграмотному крестьянину в самом глухом углу нашего Союза. Восходит она, без сомнения, к глубокой древности и употребительна не только у нас. Не говоря уже о родстве с китайскими обозначениями, бросается в глаза и сходство этой упрощенной нумерации с римской: и в римских цифрах палочки означают единицы, косые кресты - десятки.

Любопытно, что народная нумерация эта некогда была даже у нас узаконена: по такой именно системе, только более развитой, должны были вестись сборщиками податей записи в податной тетради. «Сборщик, - читаем мы в старом Своде Законов, - принимая от кого-либо из домохозяев вносимые к нему деньги, должен сам, или через писаря, записать в податной тетради против имени того домохозяина, которого числа сколько получено денег, выставляя количество принятой суммы цифрами и знаками. Знаки сии для сведения всех и каждого ввести повсеместно одинаковые, а именно:

десять рублей означать знаком ..... □
рубль ..... ○
десять копеек ..... ×
копейка I
четверть ..... –

Например, двадцать восемь рублей пятьдесят семь копеек три четверти:

(□ □ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ × × × × × IIIIIII ≡)».

В другом месте того же тома «Свода Законов» находим еще раз упоминание об обязательном употреблении народных числовых обозначений. Приводятся особые знаки для тысяч рублей - в виде шестиконечной звезды с крестом в ней, и для ста рублей - в виде колеса с 8 спицами. Но обозначения для рубля и десяти копеек здесь устанавливаются иные, чем в предыдущем законе.

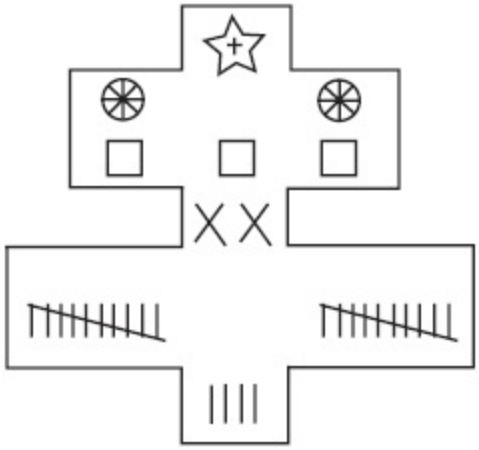
Вот текст закона об этих так называемых «ясачных знаках»:

«Чтобы на каждой квитанции, выдаваемой Родовитому Старосте, от которого внесен будет ясак, кроме изложения словами, было показываемо особыми знаками число внесенных рублей и копеек так, чтобы сдающие простым счетом сего числа могли быть уверены в справедливости показания[43]. Употребляемые в квитанции знаки означают:

(звезда) тысяча руб.,
(колесо) сто рублей,
□ десять рублей,
× один рубль,
IIIIIIIII десять коп.,
I копейку.

Дабы не можно было сделать здесь никаких прибавлений, все таковые знаки очерчивать кругом прямыми линиями. Например:

1232 р. 24 к. изображают так: (см. рис.)».



Как видите, употребляемые нами арабские и римские цифры - не единственный способ обозначения чисел. В старину применялись у нас, да и еще теперь по деревням применяются другие системы письменного счисления, отдаленно сходные с римскими и совсем не сходные с арабскими цифрами.

Но и это еще не все способы изображения чисел, употребляющиеся в наши дни: многие торговцы, например, имеют свои секретные знаки для числовых обозначений, - так называемые торговые «меты». О них побеседуем сейчас подробнее.

Секретные торговые меты

На вещах, купленных у офеней[44] или в частных магазинах, особенно провинциальных - вы, вероятно, замечали иногда непонятные буквенные обозначения вроде

а ве в уо.

Это не что иное, как цена вещи без запроса, которую торговец для памяти обозначает на товаре, но так, однако, чтобы ее не мог разгадать покупатель. Бросив взгляд на эти буквы, торговец сразу проникает в их скрытый смысл и, сделав надбавку, называет покупателю цену с запросом.

Такая система обозначения весьма проста, - если только знать «ключ» к ней. Торговец выбирал какое-нибудь слово, составленное из 10 различных букв; чаще всего останавливали выбор на словах: трудолюбие, правосудие, ярославецъ, миролюбецъ, Миралюбовъ.

Первая буква слова означает - 1, вторая - 2, третья - 3 и т. д.; десятою буквою обозначается нуль. С помощью этих условных букв-цифр торговец и обозначает на товарах их цену, храня в строгом секрете «ключ» к своей системе обозначения.

Если, например, выбрано слово:

правосудие

1234567890,

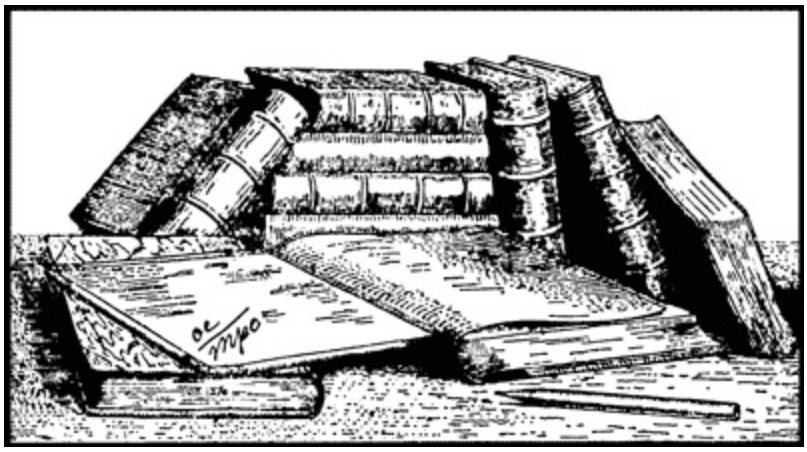
то цена 4 р. 75 к. будет обозначена так:

в уо.

Знак «*поe*» означает 1 р. 50 к. (150), *пее* - 1 рубль (100) и т. п.

Иногда цена на товаре бывает написана в виде дроби; например, на одной из купленных мною книг имеется обозначение

$$\frac{ое}{тро}.$$



Это значит, при ключе «трудолюбие», что надо запросить 1 р. 25 коп., себе же книга стоила 50 коп.

Секрет своей меты торговцы строго берегут. Но если купить в одном и том же магазине несколько вещей, то, сопоставляя названную торговцем цену с соответствующими обозначениями, нетрудно догадаться о значении букв. Особенно легко разгадывать меты дешевых товаров, где запрашивают немного, так что первые цифры уплаченных сумм отвечают начальным буквам обозначения. Разгадав же несколько букв, легко доискаться значения остальных. При некоторой проницательности может быть разгадан «ключ» любой меты.

Допустим, например, что вы купили несколько вещей и заплатили за первую 25, за вторую - 22, за третью - 28 копеек. В уголках этих предметов вы находите такие обозначения

ро, рр, рд.

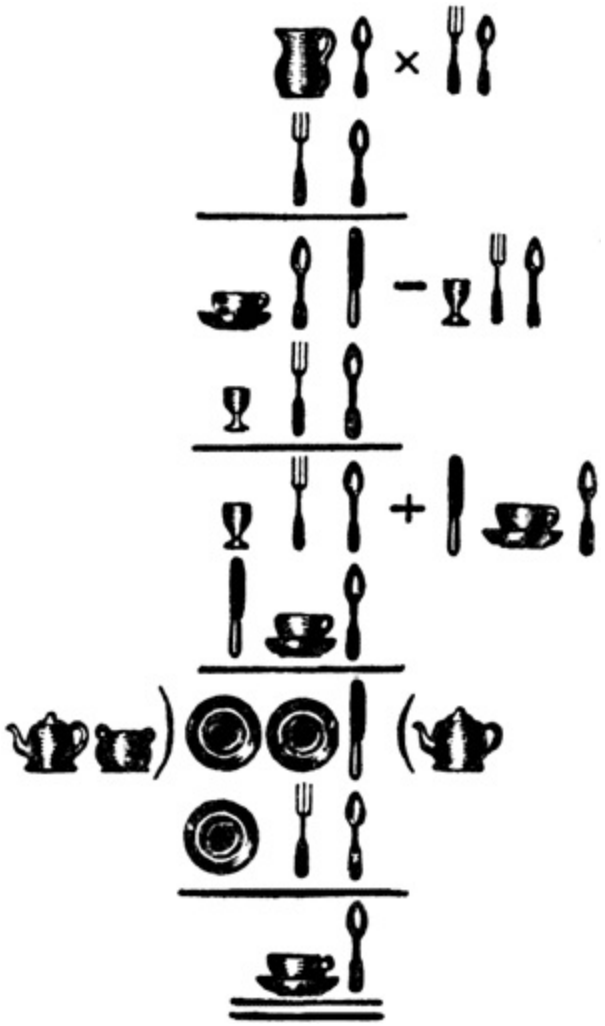
Ясно, что буква р означает 2. Отгадав, по другим товарам, еще одну букву, - например, с = 6, вы уже догадаетесь, что ключ - правосудие. Число подходящих слов, надо заметить, ограничено, и выбор не бывает чересчур затруднительным.

Арифметика за завтраком

После сказанного легко сообразить, что числа можно изображать не только с помощью цифр, но и с помощью любых иных знаков или даже предметов - карандашей, перьев, линеек, резинок и т. п.; надо только условиться приписывать каждому предмету значение какой-нибудь определенной цифры. Можно даже, ради курьеза, с помощью таких цифр-предметов изображать действия над числами - складывать, вычитать, умножать, делить. Вот, например, ряд действий над числами, обозначенный предметами сервировки стола (см. рис.). Вилка, ложка, нож, кувшинчик, чайник, тарелка - все это знаки, каждый из которых заменяет определенную цифру.

Задача № 2

Глядя на эту группу ножей, вилок, посуды и т. п., попробуйте угадать: какие именно числа здесь обозначены?



С первого взгляда такая задача кажется очень трудной: приходится разгадывать настоящие иероглифы, как сделал некогда француз Шамполион. Но ваша задача гораздо легче: вы ведь знаете, что числа здесь, хотя обозначены вилками, ножами, ложками и т. п., написаны по десятичной системе счисления, т. е. вам известно, что тарелка, стоящая на втором месте (считая справа), есть цифра десятков, что предмет направо от нее - цифра единиц, а по левую сторону - цифра сотен. Кроме того, вы знаете, что расположение всех этих предметов имеет определенный смысл, который вытекает из сущности арифметических действий, производимых над обозначенными ими числами. Все это может значительно облегчить вам решение предложенной задачи.

Решение

Вот как можно доискаться значения расставленных здесь предметов. Рассматривая первые три ряда на нашем рисунке, вы видите, что «ложка», умноженная на «ложку», дает «нож». А из следующих рядов видно, что «нож» без «ложки» дает «ложку», или что «ложка» + «ложка» = «ножу». Какая же цифра дает одно и то же и при удвоении и при умножении само на себя? Это может быть только 2, потому что 2 х 2 = 2 + 2. Таким образом узнаем, что «ложка» = 2 и, следовательно, «нож» = 4.

Теперь идем дальше. Какая цифра обозначена «вилкой»? Попробуем разгадать это, присмотревшись к первым трем рядам, где «вилка» участвует в умножении, и к рядам III, IV и V, где та же «вилка» фигурирует в действии вычитания. Из группы вычитания вы видите, что отнимая, в разряде десятков, «вилку» от «ложки», получаем в результате «вилку», т. е. при вычитании два минус «вилка» получается «вилка». Это может быть в двух случаях: либо «вилка» = 1, и тогда 2-1 = 1; либо же «вилка» = 6, и тогда, вычитая 6 из 12 (единица высшего разряда занимается у «чашки»), получаем 6.

Что же выбрать: 1 или 6? Испытаем, годится ли 6 для «вилки» в других действиях. Обратите внимание на сложение V и VI рядов: «вилка» (т. е. 6) + «чашка» = «тарелке»; значит, «чашка» должна быть меньше 4 (потому что в рядах VII и VIII «тарелка» минус «вилка» = «чашке»). Но «чашка» не может равняться двойке, так как двойка обозначена уже «ложкой»; не может «чашка» быть и единицей - иначе вычитание IV ряда из III не могло бы дать трехзначного числа в V ряду. Не может, наконец, «чашка» обозначать и 3 - вот почему: если «чашка» = 3, то «бокальчик» (см. ряды IV и V) должен обозначать единицу; потому что 1 + 1 = 2, т. е. «бокальчик» + «бокальчик» = «чашке», убавленной на единицу, которая была занята у него при вычитании в разряде десятков; «бокальчик» же равняться единице не может, потому что тогда «тарелка» в VII ряду будет обозначать в одном случае цифру 5 («бокальчик» + «нож»), а в другом цифру 6 («вилка» + «чашка»), чего быть не может. Значит, нельзя было допустить, что «вилка» = 6, а надо было принять ее равной единице.

Узнав путем таких - довольно, правда, долгих, - поисков, что «вилка» обозначает цифру 1, мы дальше уже идем более уверенно и быстро. Из действия вычитания в III и IV рядах видим, что «чашка»

обозначает либо 6, либо 8. Но 8 приходится отвергнуть, потому что тогда вышло бы, что «бокальчик» - 4, а мы знаем, что цифра 4 обозначена «ножом». Итак, «чашка» обозначает цифру 6, а следовательно, «бокальчик» - цифру 3.

Какая же цифра обозначена «кувшинчиком» в I ряду? Это легко узнать, раз нам известно произведение (III ряд, 624) и один из множителей (II ряд, 12). Разделив 624 на 12, получаем 52. Следовательно, «кувшинчик» = 5.

Значение «тарелки» определяется просто: в VII ряду «тарелка» = «вилке» + «чашка» = «бокальчику» + «нож»; т. е. «тарелка» = 1 + 6 = 3 + 4 = 7.

Остается разгадать цифровое значение «чайника» и «сахарницы» в VII ряду. Так как для цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 предметы уже найдены, то остается выбирать только между 8, 9 и 0. Подставим в действие деления, изображенное в последних трех рядах[45], соответствующие цифры вместо предметов. Получим такое расположение (буквами ч и с обозначены «чайник» и «сахарница»):

чс) 774 (*ч*
712
62.

Число 712, мы видим, есть произведение двух неизвестных чисел чс и ч, которые, конечно, не могут быть ни нулем, ни оканчиваться нулем: значит, ни ч, ни с не есть нуль. Остается два предположения: ч = 8 и с = 9 или же, наоборот, ч = 9 и с = 8. Но перемножив 98 на 8, мы не получаем 712; следовательно, «чайник» обозначает 8, а «сахарница» 9 (действительно: 89 x 8 = 712).

Итак, мы разгадали иероглифическую надпись из предметов столовой сервировки:

кувшин = 5
ложка = 2
вилка = 1
чашка = 6
бокальчик = 3
чайник = 8
сахарница = 9
тарелка = 7.

А весь ряд арифметических действий, изображенный этой

оригинальной сервировкой, приобретает такой смысл:

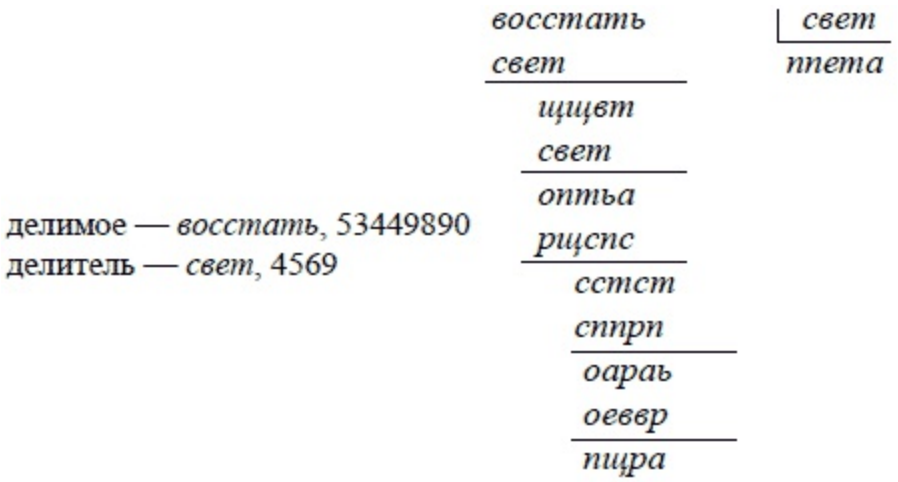
52×12
12
624–312
312
312+462
462
89) 774 (8
712
62.

Арифметические ребусы

То, что я предлагаю назвать арифметическими ребусами - занимательная игра американских школьников, у нас пока еще совершенно неизвестная[46]. Она состоит в отгадывании задуманного слова посредством решения задачи вроде той, какую мы решили в предыдущей статье. Загадывающий задумывает слово, состоящее из 10 неповторяющихся букв, - например, «трудолюбие», «специально», «просвещать». Приняв буквы задуманного слова за цифры, загадывающий изображает посредством этих букв какой-нибудь случай деления. Если задумано слово «просвещать», то можно взять такой пример деления:

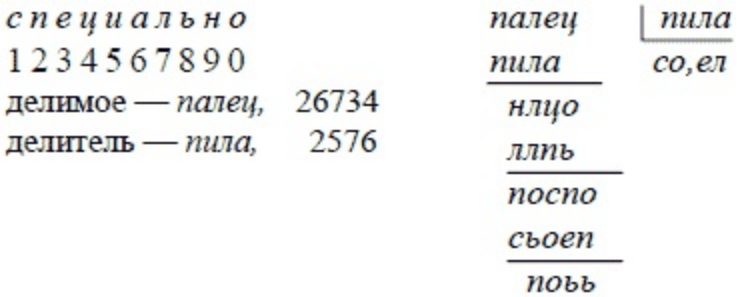
п р о с в е щ а т ь	123564	3548	*провес*	*овса*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	10644	34	*пьесс*	*ос*
делимое — *провес,* 123564	17124		*пщпрс*	
делитель — *овса,* 3548	14192		*псптр*	
	2932		*ртор*	

Можно взять и другие слова:



Буквенное изображение определенного случая деления вручается отгадчику, который и должен по этому бессмысленному, казалось бы, набору букв угадать задуманное слово. Как следует в подобных случаях доискиваться числового значения букв, - читатель уже знает: мы объяснили это, когда решали задачу предыдущей статьи. При некотором терпении можно успешно разгадывать эти арифметические ребусы, если только пример достаточно длинен и дает необходимый материал для догадок и испытаний. Если же выбраны слова, дающие чересчур короткий случай деления, например:

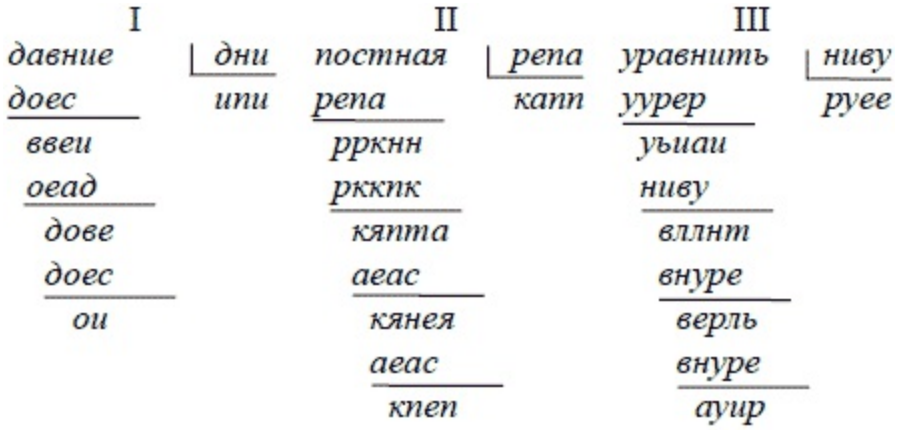
- то разгадывание очень трудно. В подобных случаях надо просить загадывающего продолжить деление до сотых или тысячных долей, т. е. получить в частном еще 2 или 3 десятичных знака. Вот пример деления до сотых долей:



Если бы в этом случае мы остановились на целом частном (со), отгадка задуманного слова едва ли была бы возможна.

Задачи №№ 3-5

Для читателя, который пожелал бы испытать свои силы в разрешении подобных арифметических ребусов, привожу еще три примера:



По этим образцам читатель сможет самостоятельно составить множество других примеров.

(Решения этих задач - см. далее, стр. 168, внизу).

Десятичная система в книжных шкафах

Особенность десятичной системы счисления остроумно используется даже в такой области, где с первого взгляда этого и ожидать не приходится, - именно, при распределении книг в библиотеке.

Обычно, желая указать библиотекарю номер нужной вам книги, вы просите дать вам каталог и предварительно справляетесь в нем, - потому что в каждом книгохранилище имеется обыкновенно своя нумерация книг. Существует, однако, и такая система распределения книг по номерам, при которой одна и та же книга должна иметь одинаковый номер во всякой библиотеке. Это так называемая «десятичная система классификации книг».

Система эта (к сожалению, принятая пока еще далеко не всюду) чрезвычайно удобна и весьма несложна. Сущность ее в том, что каждая

отрасль знания обозначается определенным числом и притом так, что цифровой состав этого числа сам говорит о месте данного предмета в общей системе знаний.

Книги прежде всего разбиваются на десять обширных классов, обозначенных цифрами от 0 до 9.

0. Сочинения общего характера.

1. Философия.

2. Религия.

3. Существенные науки. Право.

4. Филология. Языки.

5. Физико-математические и естественные науки.

6. Прикладные науки (медицина, техника, сельское хозяйство и т. п.).

7. Изящные искусства.

8. Литература.

9. История, география, биографии.

В обозначении №-ра книги по этой системе первая цифра прямо указывает на ее принадлежность к тому или иному классу из перечисленных выше: каждая книга по философии имеет №, начинающийся с 1, по математике - с 5, по технике - с 6. И, наоборот, если № книги начинается, например, с 4, то, еще не раскрывая книги, мы можем утверждать, что перед нами сочинение из области языкознания.

Далее, каждый из десяти перечисленных классов книг подразделяется на 10 главных отделов, тоже отмеченных цифрами; эти цифры ставят в обозначении №-ра на втором месте. Так, 5-й класс, включающий физико-математические и естественно-научные книги, разделяется на следующие отделы:

50. Общие сочинения по физ.-мат. и естественным наукам.
51. Математика.
52. Астрономия. Геодезия.
53. Физика. Механика теоретическая.
54. Химия. Минералогия.
55. Геология.
56. Палеонтология.
57. Биология. Антропология.
58. Ботаника.
59. Зоология.

Сходным образом разбиваются по отделам и остальные классы. Например, в классе прикладных наук (6) отдел медицины обозначается цифрой 1 после 6-ти, т. е. числом 61; по сельскому хозяйству - 63, по домоводству - 64; торговле и путям сообщения - 65, химической

промышленности и технологии - 66 и т. п. Точно так же в 9-м классе все книги по географии и путешествиям относятся к отделу № 91, и т. п.

Присоединение к двум первым цифрам третьей характеризует ее содержание еще точнее, указывая, к какому именно подотделу данного отдела она относится. Например, в отделе математики (51) присоединение на третьем месте цифры 1 указывает, что книга относится к арифметике (511), цифры 2 - к алгебре (512), цифры 3 - к геометрии (513) и т. д. Точно так же и отдел физики (53) разбивается на 10 подотделов: книги по электричеству обозначаются № 537, по свету - № 535, по теплоте - 536 и т. д.

Затем следует дальнейшее дробление подотдела на разряды, обозначаемые четвертой цифрой №-ра и т. д.

В библиотеке, устроенной по десятичной системе, нахождение нужной книги упрощается до крайности. Если, например, вы интересуетесь геометрией, вы прямо идете к шкафам, где №-ра начинаются с 5-ти, отыскиваете тот шкаф, где хранятся книги № 51…и пересматриваете в нем только те полки, где стоят книги № 513… здесь собраны все книги по геометрии, имеющиеся в данной библиотеке. Точно так же, ища книги по социализму и коммунизму, вы обратитесь к книгам № 333…, не заглядывая в каталог и никого не затрудняя расспросами.

Как бы обширна ни была библиотека, никогда не может случиться недостатка в числах для нумерации книг[47].

Круглые числа

Вероятно, все замечали на себе и на окружающих, что среди цифр есть излюбленные, к которым мы питаем особенное пристрастие. Мы, например, очень любим «круглые числа», т. е. оканчивающиеся на 0 или 5. Пристрастие к определенным числам, предпочтение их другим, заложено в человеческой натуре гораздо глубже, чем обыкновенно думают. В этом отношении сходятся вкусы не только европейцев и их предков, например древних римлян, - но даже первобытных народов других частей света.

При каждой переписи населения обычно наблюдается чрезмерное обилие людей, возраст которых оканчивается на 5 или на 0; их гораздо больше, чем должно бы быть. Причина кроется, конечно, в том, что люди не помнят твердо, сколько им лет, и, показывая возраст, невольно «округляют» годы. Замечательно, что подобное же преобладание «круглых» возрастов наблюдается и на могильных памятниках древних римлян.

Эта одинаковость числовых пристрастий идет еще дальше. Один германский психолог (проф. К. Марбе) подсчитал, как часто встречается в обозначениях возраста на древнеримских могильных плитах та или иная цифра, и сравнил эти результаты с повторяемостью цифр в обозначениях возраста по переписи в американском штате Алабама, где живут преимущественно негры. Получилось удивительное согласие: древние римляне и современные нам негры до малейших подробностей сходятся в числовых пристрастиях! Конечные цифры возраста, по частоте их повторяемости, располагались в обоих случаях в одинаковой последовательности, а именно:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Но и это не все. Чтобы выяснить числовые пристрастия современных европейцев, упомянутый ученый производил такого рода опыты: он предлагал множеству лиц определить «на глаз», сколько миллиметров заключает в себе полоска бумаги, например, в палец длиною, и записывал ответы. Подсчитав затем частоту повторения одних и тех же конечных цифр, ученый получил снова тот же самый ряд:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Нельзя считать случайностью, что народы, столь отдаленные друг от друга и антропологически, и географически, - обнаруживают полную

одинаковость числовых симпатий, т. е. явное пристрастие к «круглым» числам, оканчивающимся на 0 или 5, и заметную неприязнь к числам некруглым.

Любовь к пятеркам и десяткам находится, без сомнения, в прямой связи с десятичным основанием нашей системы счисления, т. е. в конечном итоге - с числом пальцев на обеих руках. Остается неразгаданной лишь та правильность, с какой слабеет эта симпатия по мере удаления от 5 и 10.

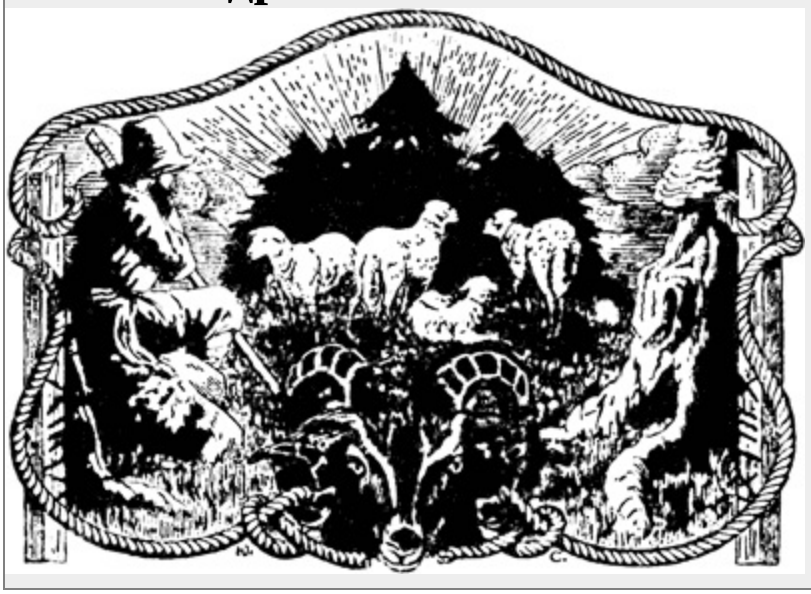
Это пристрастие к округленным числам обходится нам, надо заметить, довольно дорого. Товарные цены в розничной продаже всегда тяготеют к этим круглым числам: некруглое число, получающееся при исчислении продажной стоимости товара, дополняется до большего круглого числа. Цена книги редко бывает 57 коп., 63 коп., 84 коп., - а чаще 60 коп., 65 коп., 85 коп. Но округленность цены достигается обычно за счет покупателя, а не продавца. Общая сумма, которую потребители переплачивают за удовольствие приобретать товары по круглым ценам, накопляется весьма внушительная. Кто-то дал себе труд, задолго до последней войны, приблизительно подсчитать ее, и оказалось, что население прежней России ежегодно переплачивало в виде разницы между круглыми и некруглыми товарными ценами не менее 30 миллионов рублей. Не слишком ли дорогая дань невинной слабости к округлениям?

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

$$100 = \begin{cases} 1+2+3+4+5+6+7+8\times 9 \\ 12+3-4+5+67+8+9 \\ 12-3-4+5-6+7+89 \\ 123+4-5+67-89 \\ 123-45-67+89 \end{cases}$$

Глава II

Потомок древнего абака



Чеховская головоломка

Задача № 6

Припомним ту, в своем роде знаменитую арифметическую задачу, которая так смутила семиклассника Зиберова из Чеховского рассказа «Репетитор»:

«Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?»

С тонким юмором описывает Чехов, как беспомощно трудились над этой задачей и семиклассник-репетитор, и его ученик, двенадцатилетний Петя, пока не выручил их Петин отец, Удодов:

«Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает

делить 540 на 138.

- Для чего же вы делите? Постойте! Впрочем, так… продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка, я разделю!

Зиберов [репетитор] делит, получает 3 с остатком и быстро стирает.

- Странно… - думает он, ероша волосы и краснея. - Как же она решается? Гм!… Это задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая.

Учитель глядит в ответы и видит 75 и 63.

- Гм!… странно… Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то!

- Решайте же! - говорит он Пете.

- Ну, чего думаешь? Задача -то ведь пустяковая, - говорит Удодов Пете. - Экий ты дурак, братец! Решите уже вы ему, Егор Алексеич.

Егор Алексеич [репетитор] берет в руки грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

- Эта задача, собственно говоря, алгебраическая, - говорит он. - Ее с иксом и игреком решить можно. Впрочем, можно и так решить. Я вот разделил… Понимаете? Или вот что. Решите мне эту задачу к завтрему… Подумайте…

Петя ехидно улыбается, Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик VII класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.

- И без алгебры решить можно, - говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая. - Вот, извольте видеть…

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

- Вот-с… по-нашему, по-неученому».

*** * ***

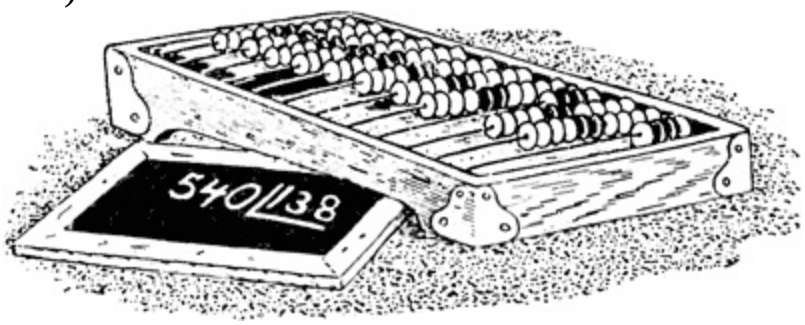
Эта сценка с задачей, заставляющая нас смеяться над конфузом злосчастного репетитора, задает нам сама три новых задачи. А именно:

1. Как намеревался репетитор решить задачу алгебраически?
2. Как должен был решить ее Петя?
3. Как решил ее отец Пети на счетах «по-неученому»?

Решение

На первые два вопроса, вероятно, без труда ответят если не все, то во всяком случае, - многие читатели нашей книжки. Третий вопрос не так прост. Но рассмотрим наши задачи по порядку.

1. Семиклассник-репетитор готов был решать задачу «с иксом и игреком», будучи уверен, что задача - «собственно говоря, алгебраическая». И он, надо думать, легко справился бы с ней, прибегнув к помощи системы уравнений (только не неопределенных, как ему казалось).



Составить два уравнения с двумя неизвестными для данной задачи очень нетрудно; вот они:

$x + y = 138$

$5x + 3y = 540$,

где x - число аршин синего, а y - черного сукна.

2. Однако задача легко решается и арифметически. Если бы вам пришлось решать ее, она, конечно, не затруднила бы вас. Вы начали бы с предположения, что все купленное сукно было синее, - тогда за всю партию в 138 аршин синего сукна пришлось бы уплатить 5 x 138 = 690 рублей; это на 690-540 = 150 рублей больше того, что было заплачено в действительности. Разница в 150 рублей указывает, что в партии имелось и более дешевое, черное сукно по 3 рубля аршин. Дешевого сукна было столько, что из двухрублевой разницы на каждом аршине составилось 150 рублей: очевидно, число аршин черного сукна определится, если разделить 150 на 2. Получаем ответ - 75; вычтя эти 75 аршин из общего числа 138 аршин, узнаем, сколько было синего сукна: 138-75 = 63. Так и должен был решать задачу Петя.

3. На очереди третий вопрос: как решил задачу Удодов-старший?

В рассказе говорится об этом очень кратко: «он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было».

В чем же, однако, состояло это «щелканье на счетах»? Каков способ решения задачи с помощью счетов?

Разгадка такова: злополучная задача решается на счетах тем же приемом, что и на бумаге, - теми же арифметическими действиями. Но выполнение их значительно упрощается благодаря преимуществам, которые наши русские счеты предоставляют всякому, умеющему с ними обращаться. Очевидно, «отставной губернский секретарь» Удодов хорошо умел считать на счетах, потому что их косточки быстро, без помощи алгебры, открыли ему то, чего репетитор-семиклассник добивался узнать «с иксом и игреком». Проследим же, какие действия должен был проделать на счетах Петин отец.

Прежде всего ему нужно было, как мы знаем, умножить 138 на 5. Для этого он, по правилам действий на счетах, умножил сначала 138 на 10, - т. е. просто перенес 138 одной проволокой выше, - а затем разделил это число пополам, опять-таки на счетах же. Деление начинают снизу: откидывают половину косточек, отложенных на каждой проволоке; если число косточек на данной проволоке нечетное, то выходят из

затруднения, «раздробляя» одну косточку этой проволоки на 10 нижних.

В нашем, например, случае делят 1.380 пополам так: на нижней проволоке, где отложено 8 косточек, откидывают 4 косточки (4 десятка), на средней проволоке из 3 косточек откидывают 1, а оставшуюся 1 косточку заменяют мысленно 10-ю нижними и делят пополам, добавляя 5 десятков к косточкам нижней; на верхней проволоке раздробляют одну косточку, прибавляя 5 сотен к косточкам средней проволоки. В результате на верхней проволоке совсем не остается косточек; на средней 1 + 5 = 6 сотен, на нижней 4 + 5 = 9 десятков. Итого 690 единиц. Выполняется все это быстро, автоматически.

Далее Удодову-старшему нужно было из 690 вычесть 540. Как проделывается это на счетах - всем известно.

Наконец, полученную разность, 150, оставалось разделить пополам: Удодов откинул из 5 косточек (десятков) 2, отдав 5 единиц нижнему ряду косточек; потом из 1 косточки на проволоке сотен отдал 5 десятков нижнему ряду: получилось 7 десятков и 5 единиц, т. е. 75.

Все эти простые действия выполняются на счетах, конечно, гораздо скорее, чем тут описано.

Русские счеты

Есть много полезных вещей, которых мы не ценим только потому, что, постоянно находясь у нас под руками, они превратились в слишком обыкновенный предмет домашнего обихода. К числу таких недостаточно ценимых вещей принадлежат и наши конторские счеты - русская народная счетная машина, представляющая собою видоизменение знаменитого «абака», или «счетной доски» наших отдаленных предков. Древние народы - египтяне, греки, римляне - употребляли при вычислениях счетный прибор «абак», очень походивший на наши десятикосточковые счеты. Это была доска (стол), разграфленная на полосы, по которым передвигали особые шашки, игравшие роль косточек наших счетов. Такой вид имел греческий абак. Абак римский имел форму медной доски с желобами (прорезами), в

которых передвигались кнопки. Родственен абаку перуанский «квипос» - ряд ремней или бечевок с завязанными на них узлами; этот счетный прибор получил особенное распространение среди первоначальных обитателей Южной Америки, но, без сомнения, был в употреблении также и в Европе (см. далее статью «Отголоски старины», стр. 166).

В средние века вплоть до XVI в. подобные приспособления были широко распространены в Европе. Но в наши дни видоизмененный абак - счеты - сохранился, кажется, только у нас да в Китае (семикосточковые счеты, «суан-пан»[48]). Запад не знает десятикосточковых счетов, - вы не найдете их ни в одном магазине Европы. Быть может, потому-то мы и не ценим этого счетного прибора так высоко, как он заслуживает, смотрим на него, как на какую-то наивную кустарную самодельщину в области счетных приборов.

Между тем, мы вправе были бы гордиться нашими конторскими счетами, так как при изумительной простоте устройства они, по достигаемым на них результатам, могут соперничать в некоторых отношениях даже со сложными, дорогостоящими счетными машинами западных стран. В умелых руках этот нехитрый прибор делает порою настоящие чудеса. Иностранцы, впервые знакомящиеся с нашими счетами, охотно признают это и ценят их выше, нежели мы сами. Специалист, заведовавший одной из крупных русских фирм по продаже счетных машин, рассказывал мне, что ему не раз приходилось изумлять русскими счетами иностранцев, привозивших ему в контору образцы

сложных счетных механизмов. Он устраивал состязания между двумя счетчиками, из которых один работал на дорогой заграничной «аддиционной» машине (т. е. машине для сложения), другой же пользовался обыкновенными счетами. И случалось, что последний, - правда, большой мастер своего дела, - брал верх над обладателем заморской диковинки в быстроте и точности вычислений. Бывало и так, что иностранец, пораженный быстротой работы на счетах, сразу же сдавался и складывал свою машину обратно в чемодан, не надеясь продать в России ни одного экземпляра.

- К чему вам дорогие счетные машины, если вы так искусно считаете при помощи ваших дешевых счетов! - говорили нередко представители иностранных фирм.

Правда, на русских счетах нельзя производить всех тех действий, которые выполняются машинами. Но во многом, - например, в сложении и вычитании, - счеты могут соперничать со сложными приборами. Впрочем, в искусных руках умножение и деление также значительно ускоряются на счетах, если знать приемы выполнения этих действий.

Познакомимся же с некоторыми из них.

Умножение на счетах

Вот несколько приемов, пользуясь которыми всякий, умеющий быстро складывать на счетах, сможет проворно выполнять встречающиеся на практике примеры умножения.

Умножение на 2 и на 3 заменяется двукратным и троекратным сложением.

При умножении на 4 умножают сначала на 2 и складывают этот результат с самим собою.

Умножение числа на 5 выполняется на счетах так: переносят все число одной проволокой выше, - т. е. умножают его на 10, а затем делят это 10-кратное число пополам (как делить на 2 с помощью счетов - мы уже объяснили выше, на стр. 159).

Вместо умножения на 6 умножают на 5 и прибавляют умножаемое.

Вместо умножения на 7 множат на 10 и отнимают умножаемое три раза.

Умножение на 8 заменяют умножением на 10 без 2-х.

Точно так же множат на 9: заменяют умножением на 10 без 1.

При умножении на 10 - переносят, как мы уже сказали, все число одной проволокой выше.

Читатель, вероятно, уже и сам сообразит, как надо поступать при умножении на числа больше 10-ти и какого рода замены тут окажутся наиболее удобными. Множитель 11 надо, конечно, заменить на 10 + 1. Множитель 12 заменяют на 10 + 2, или практически 2 + 10, т. е. сначала откладывают удвоенное число, а затем прибавляют уде - сятеренное. Множитель 13 заменяется на 10 + 3 и т. д.

Рассмотрим несколько особых случаев для множителей первой сотни:

20 = 10 × 2	32 = 22 + 10
22 = 11 × 2	42 = 22 + 20
25 = (100 : 2) : 2	43 = 33 + 10
26 = 25 – 1	45 = 50 – 5
27 = 30 – 3	63 = 33 + 30 и т. д.

Легко видеть, между прочим, что с помощью счетов очень удобно умножать на такие числа, как на 22, 33, 44, 55 и т. п.; поэтому надо стремиться при разбивке множителей пользоваться подобными числами с одинаковыми цифрами.

К сходным приемам прибегают и при умножении на числа, большие 100. Если подобные искусственные приемы утомительны, мы всегда, конечно, можем умножить с помощью счетов по общему правилу, умножая каждую цифру множителя и записывая частные произведения - это все же дает некоторое сокращение времени.

Деление на счетах

Выполнять деление с помощью конторских счетов гораздо труднее, чем умножать; для этого нужно запомнить целый ряд особых приемов, подчас довольно замысловатых. Интересующимся ими придется обратиться к специальным руководствам. Здесь укажу лишь, ради примера, удобные приемы деления с помощью счетов на числа первого десятка (кроме числа 7, способ деления на которое чересчур сложен).

Как делить на 2, мы уже знаем (стр. 159) - способ этот очень прост.

Гораздо сложнее прием деления на 3: он состоит в замене деления умножением на бесконечную периодическую дробь 3,3333… (известно, что 0,333… = $^1/_3$). Умножать с помощью счетов на 3 мы умеем; уменьшать в 10 раз тоже несложно: надо лишь переносить делимое одной проволокой ниже. После недолгого упражнения этот прием деления на 3, на первый взгляд длинноватый, оказывается довольно удобным на практике.

Деление на 4, конечно, заменяется двукратным делением на 2.

Еще проще деление на 5: его заменяют делением на 10 и удвоением результата.

На 6 делят с помощью счетов в два приема: сначала делят на 2, потом полученное делят на 3.

Деление на 7, как мы уже сказали, выполняется с помощью счетов чересчур сложно, и потому здесь излагать его не будем.

На 8 делят в три приема: сначала на 2, потом полученное вновь на

2, и затем еще раз на 2.

Очень интересен прием деления на 9. Он основан на том, что $^1/_9$ = 0,1111… Отсюда ясно, что вместо деления на 9 можно последовательно складывать 0,1 делимого + 0,01 его + 0,01 его и т. д.[49]

Всего проще, как видим, делить на 2, 10 и 5, - и, конечно, на такие кратные им числа, как 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Эти случаи деления не представляют трудности и для малоопытного счетчика.

Улучшение счетов

Задача № 7

Какие косточки на наших конторских счетах являются совершенно излишними?

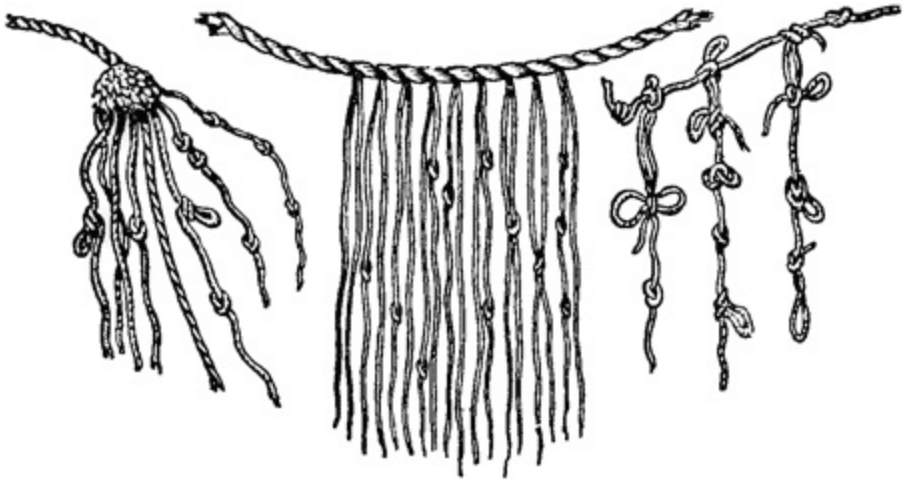
Решение

Совершенно излишни десятые косточки каждого ряда; можно вполне обойтись 9-ю косточками на проволоке. В самом деле: когда надо отложить 10-ю косточку, вы отодвигаете все 9 косточек назад, а на следующей проволоке откидываете одну косточку. Другими словами, десятая косточка на счетах так же не нужна, как не нужна особая цифра для обозначения 10-ти: 9 + 1 есть единица высшего разряда, и ее можно сразу же так и записать.

Отголоски старины

С отдаленными предками наших конторских счетов связаны некоторые пережитки старины в языке и обычаях.

Мало кто подозревает, например, что собственно мы делаем, завязывая «для памяти» узелок на носовом платке. Мы повторяем то, что некогда с большим смыслом делали наши предки, «записывая» таким образом итог счета на шнурках. Веревка с узлами представляла собой некогда счетный прибор, в принципе аналогичный нашим счетам и, без сомнения, связанный с ними общностью происхождения: это - «веревочный абак».



Образцы перуанских «квипосов» - узловая запись чисел.

С абаком же связаны и такие распространенные теперь слова, как «банк» и «чек». «Банк» по-немецки означает скамья. Что же общего между финансовыми учреждением, - «банком» в современном смысле слова, - и скамьей? Оказывается, здесь далеко не простое совпадение названий. Абак в форме скамьи был широко распространен в торговых кругах Германии в XV-XVI веках; каждая меняльная лавка или банкирская контора характеризовалась присутствием «счетной скамьи», - естественно, что скамья стала синонимом банка.

Более косвенное отношение к абаку имеет слово «чек». Оно английского происхождения и производится от глагола «чекер» (checker) - графить; «чекеред» (графленный) называли разграфленную в форме абака кожаную салфетку, которую в XVI-XVII веках английские коммерсанты носили с собою в свернутом виде и, в случае надобности произвести подсчет, развертывали на столе. Бланки для расчетов графились по образцу этих свертывающихся абаков, и неудивительно, что на них перенесено было, в сокращенном виде, самое название этих

счетных приборов: от слова «чекеред» произошло слово «чек».

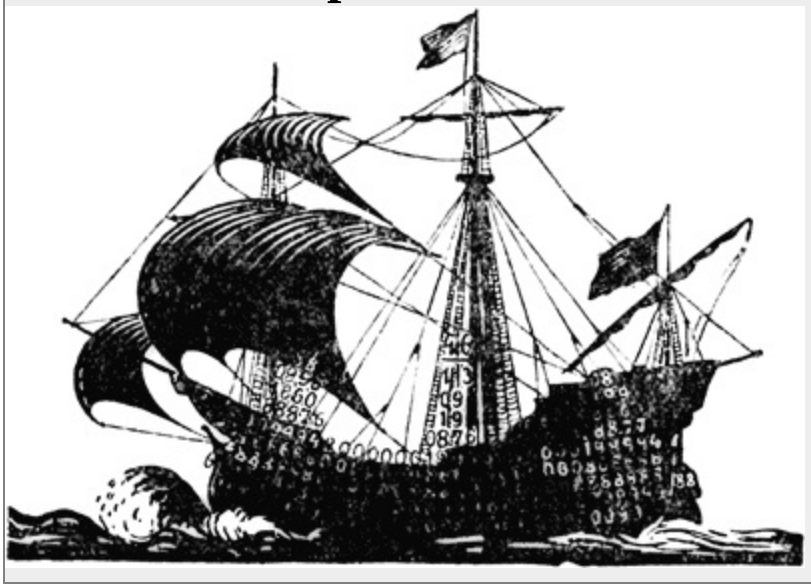
Любопытно, откуда произошло выражение «остаться на бобах», которое мы применяем теперь к человеку, проигравшему все свои деньги. Оно также древнего происхождения и относится к тому времени, когда все денежные расчеты - в том числе и расчеты между игроками, - производились на абаке, на счетном столе или скамье, с помощью бобов, заменявших косточки наших счетов. «Один считает на камешках, другой - на бобах», читаем у Кампанеллы в «Государстве Солнца» (1602). Человек, проигравший свои деньги, оставался с одними бобами, выражавшими сумму его проигрыша - отсюда и соответствующий оборот речи.

Решение числовых ребусов, предложенных на стр. 148-й:

I — «совпадение»; II — «крепостная»;
III — «уравнитель»

Глава III

Немного истории



«Трудное дело - деление»

Зажигая привычным движением спичку, мы иной раз еще задумываемся над тем, каких трудов стоило добывание огня нашим предкам, даже не очень отдаленным. Но мало кто подозревает, что и нынешние способы выполнения арифметических действий тоже не всегда были так просты и удобны, так прямо и быстро приводили к результату. Предки наши пользовались гораздо более громоздкими и медленными приемами. И если бы школьник XX века мог перенестись за четыре, за три века назад, он поразил бы наших предков быстротой и безошибочностью своих арифметических выкладок. Молва о нем облетела бы окрестные школы и монастыри, затмив славу искуснейших счетчиков той эпохи, и со всех сторон приезжали бы учиться у нового великого мастера счетного дела.

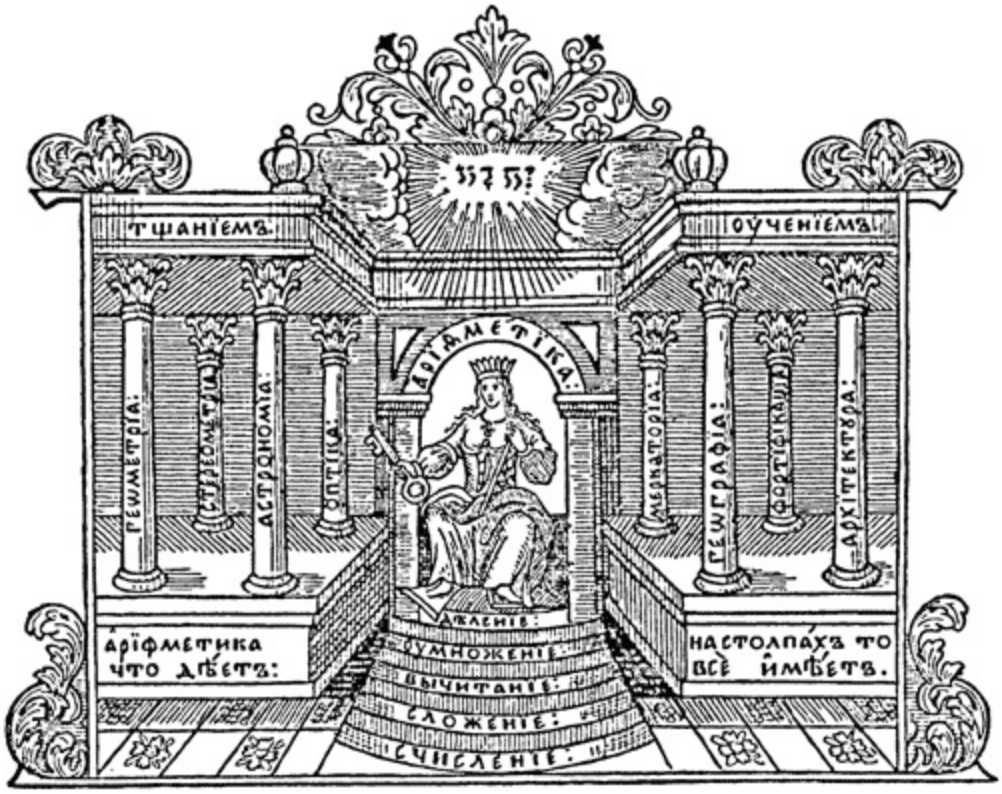
Особенно сложны и трудны были в старину действия умножения и деления - последнее всего больше. Тогда не существовало еще, как теперь, одного выработанного практикой приема для каждого действия.

Напротив, в ходу была одновременно чуть не дюжина различных способов умножения и деления - приемы один другого запутаннее, твердо запомнить которые не в силах был человек средних способностей. Каждый учитель счетного дела держался своего излюбленного приема, каждый «магистр деления» (были такие специалисты) восхвалял собственный способ выполнения этого действия. И все эти приемы умножения - «шахматами, или органчиком», «загибанием», «по частям, или в разрыв», «крестиком», «решеткой», «задом наперед», «ромбом», «треугольником», «кубком или чашей», «алмазом» и прочие[50], а также все способы деления, носившие не менее затейливые наименования, соперничали друг с другом в громоздкости и сложности. Усваивались они с большим трудом и лишь после продолжительной практики. Признавалось даже, что для овладения искусством быстрого и безошибочного умножения и деления многозначных чисел нужно особое природное дарование, исключительные способности; рядовым людям премудрость эта недоступна. «Трудное дело - деление» гласила старинная латинская поговорка; оно и в самом деле было трудно, если принять во внимание утомительные методы, какими выполнялось тогда это действие. Нужды нет, что способы эти носили подчас довольно игривые названия: под веселым названием скрывался длиннейший ряд запутанных манипуляций. В XVI веке кратчайшим и удобнейшим способом считалось, например, деление «лодкой, или галерой». Знаменитый итальянский математик того времени Николай Тарталья (XVI век) в своем обширном учебнике арифметики писал о нем следующее.

«Второй способ деления называется в Венеции[51] лодкой или галерой, вследствие некоторого сходства фигуры, получающейся при этом, потому что при делении некоторых родов чисел составляется фигура, похожая на лодку, а в других - на галеру, которая в самом деле красиво выглядит; галера получается иной раз хорошо отделанная и снабженная всеми принадлежностями - выкладывается из чисел так, что она действительно представляется в виде галеры с кормою и носом, мачтою, парусами и веслами».

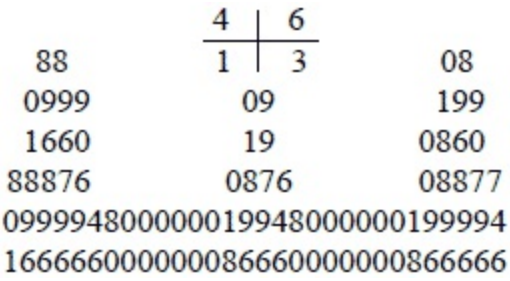
Читается это очень весело: так и настраиваешься скользить по числовому морю на парусах арифметической галеры. Но хотя старинный математик и рекомендует этот способ как - «самый изящный, самый легкий, самый верный, самый употребительный и

самый общий из существующих, пригодный для деления всех возможных чисел», - я не решаюсь все же его изложить здесь из опасения, что даже терпеливый читатель закроет книгу в этом скучном месте и не станет читать дальше. Между тем, этот утомительный способ действительно был самым лучшим в ту эпоху, а у нас в России употреблялся до середины XVIII века: в «Арифметике» Леонтия Магницкого[52] он описан в числе шести предлагаемых там способов (из которых ни один не похож на современный) и особенно рекомендуется автором; на протяжении своей объемистой книги - 640 страниц большого формата - Магницкий пользуется исключительно «способом галеры», не употребляя, впрочем, этого наименования.



Заставка из «Арифметики» Магницкого (XVIII в.). По экземпляру, принадлежащему Я. И. Перельману.

В заключение покажем читателю эту числовую «галеру», воспользовавшись примером из упомянутой книги Тартальи:



Делимое - 888888000000088880000000888888 (88-частное

Делитель[53] - 999990000000099900000000099999

999990000000099900000000099

Мудрый обычай старины

Добравшись после утомительных трудов до желанного конца арифметического действия, предки наши считали необходимым непременно проверить этот в поте лица добытый итог. Громоздкие приемы вызывали недоверие к их результатам. На длинном, извилистом пути легче заблудиться, чем на прямой дороге современных приемов. Отсюда естественно возник старинный обычай проверять каждое выполняемое арифметическое действие - похвальное правило, которому не мешало бы и нам следовать.

Любимым приемом поверки был так называемый «способ 9». Этот изящный прием, который полезно и теперь знать каждому, нередко описывается и в современных арифметических учебниках, особенно иностранных. Правда, он почему-то мало теперь употребляется на практике, но это нисколько не умаляет его достоинств.

Поверка девяткой основана на «правиле остатков», гласящем: остаток от деления суммы на какое-либо число равен сумме остатков от деления каждого слагаемого на то же число. Точно так же остаток произведения равен произведению остатков множителей. С другой стороны, известно также[54], что при делении числа на 9 получается тот же остаток, что и при делении на 9 суммы цифр этого числа; например, 758 при делении на 9 дает остаток 2, и то же получается в остатке от деления (7 + 5 + 8) на 9. Сопоставив оба указанных свойства, мы и приходим к приему поверки девяткой, т. е. делением на 9. Покажем на примере, в чем он состоит.

Пусть требуется проверить правильность сложения следующего столбца:

$$\begin{array}{r} 38932\ldots\ldots 7 \\ 1096\ldots\ldots 7 \\ +\,4710043\ldots\ldots 1 \\ 589106\ldots\ldots 2 \\ \hline 5339177\ldots\ldots 8. \end{array}$$

Составляем в уме сумму цифр каждого слагаемого, причем в получающихся попутно числах также складываем цифры (делается это в самом процессе сложения цифр), пока, в конечном результате, не получим однозначного числа. Результаты эти (остатки от деления на 9) записываем, как показано на примере, рядом с соответствующим слагаемым. Складываем все остатки (7 + 7 + 1 + 2 = 17; 1 + 7 = 8), - получаем 8. Такова же должна быть сумма цифр итога (5339177), если действие выполнено верно: 5 + 3 + 3 + 9 + 1 + 7 + 7, после всех упрощений, равно 8.

Поверка вычитания выполняется точно так же, если принять уменьшаемое за сумму, а вычитаемое и разность - за слагаемые. Например:

$$\begin{array}{r} 6913\ldots\ldots\ldots 1 \\ -\;2587\ldots\ldots\ldots \times 4 \\ \hline 4326 \qquad\qquad 6 \end{array}$$

4+6=10; 1+0=1.

Несложна и поверка умножения, как видно из следующего примера:

$$\begin{array}{r} \times\,8713\ldots\ldots\ldots 1 \\ 264\ldots\ldots\ldots \times 3 \\ \hline 34852 \qquad\qquad 3 \\ 52278 \\ 17426 \\ \hline 2300232\ldots\ldots\ldots 3. \end{array}$$

Если при такой поверке умножения обнаружена будет ошибочность результата, то чтобы определить, где именно кроется ошибка, можно поверить способом 9-ки каждое частное произведение отдельно; а если здесь ошибки не окажется, надо поверить еще и

сложение частных произведений. Такая поверка сберегает время и труд только при умножении многозначных чисел; при малых числах проще, конечно, выполнить действие заново.

Как поверять по этому способу деление? Если у нас случай деления без остатка, то делимое рассматривается, как произведение делителя на частное. В случае же деления с остатком пользуются тем, что делимое = делителю х частное + остаток. Например:

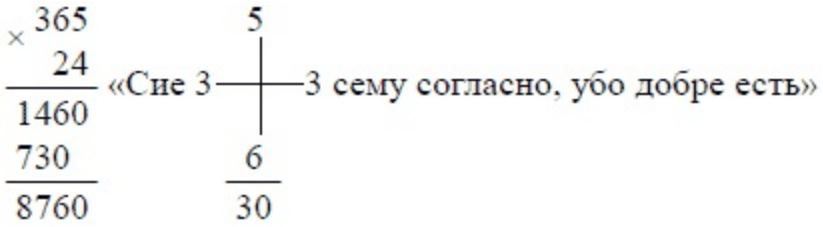
16201387 : 4457 = 3635; остаток 192

сумма цифр: 1 2 8 3

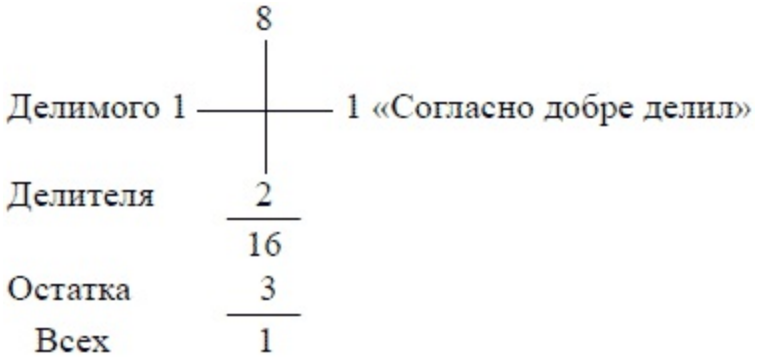
2×8+3 = 19; 1+9=10; 1+0=1.

Выписываю из «Арифметики» Магницкого предлагаемое там для поверки девяткой удобное расположение:

Д л я у м н о ж е н и я:



Д л я д е л е н и я:



Подобная поверка действий, без сомнения, не оставляет желать лучшего в смысле быстроты и удобства. Нельзя сказать того же о ее надежности: ошибка может и ускользнуть от нее. Действительно, ведь одну и ту же сумму цифр могут иметь разные числа; не только перестановка цифр, но иной раз даже и замена одних другими остаются при такой поверке необнаруженными. Укрываются от контроля также лишние девятки и нули, потому что не влияют на сумму цифр. Всецело полагаться поэтому на такой прием поверки было бы неосмотрительно. Предки наши сознавали это и не ограничивались одною лишь поверкой

с помощью девятки, но производили еще дополнительную поверку - чаще всего с помощью семерки. Этот прием основан на том же «правиле остатков» (стр. 174), но не так удобен, как способ девятки, потому что деление на 7 приходится выполнять полностью, чтобы найти остатки (а при этом легко возможны ошибки в действиях самой поверки). Две поверки - девяткой и семеркой - уже являются гораздо более надежным контролем: что ускользнет от одной, будет уловлено другою. Ошибка не обнаружится лишь в том случае, если разность истинного и полученного результатов кратна числу 7x9 = 63. Так как подобная случайность все же возможна, то и двойная поверка не дает полной уверенности в правильности результата.

Впрочем, для обычных вычислений, где ошибаются чаще всего на 1 или 2 единицы, можно ограничиться только поверкою девяткой. Дополнительная поверка семеркой чересчур обременительна. Только тот контроль хорош, который не мешает работе.

Хорошо ли мы множим?

Старинные способы умножения были неуклюжи и неудобны, - но так ли хорош наш нынешний способ, чтобы в нем невозможны были уже никакие дальнейшие улучшения? Нет, наш способ безусловно не является совершенным; можно придумать еще более быстрые или еще более надежные. Из нескольких предложенных улучшений (ср. гл. VII) укажем пока одно, увеличивающее не быстроту выполнения действия, а его надежность. Оно состоит в том, что при многозначном множителе начинают с умножения не на последнюю, а на первую цифру множителя. Выполненное на стр. 175-й умножение 8713 x 264 примет при этом такой вид:

```
   8713
    264
---------
  17426
  52278
  34852
---------
 2300232.
```

Преимущество подобного расположения в том, что цифры частных

произведений, от которых зависят первые, наиболее ответственные цифры результата, получаются в начале действия, когда внимание еще не утомлено и, следовательно, вероятность сделать ошибку наименьшая. (Кроме того, способ этот упрощает применение так называемого «сокращенного» умножения, о котором мы здесь распространяться не можем[55].)

Русский способ умножения

Вы не можете выполнить умножения многозначных чисел - хотя бы даже двузначных, - если не помните наизусть всех результатов умножения однозначных чисел, т. е. того, что называется таблицей умножения. В старинной «Арифметике» Магницкого, о которой мы раньше упоминали, необходимость твердого знания таблицы умножения воспета в таких - надо сознаться, чуждых для современного слуха - стихах:

Аще кто не твердит
таблицы и гордит,
Не может познати
числом что множати
И во всей науки,
несвобод от муки,
Колико не учит
туне ся удручит
И в пользу не будет
аще ю забудет.

Автор этих стихов, очевидно, не знал или упустил из виду, что существует способ перемножать числа и без знания таблицы умножения. Способ этот, не похожий на наши школьные приемы, употребителен в обиходе великорусских крестьян и унаследован ими от глубокой древности. Сущность его в том, что умножение любых двух чисел сводится к ряду последовательных делений одного числа пополам

при одновременном удвоении другого числа.

Вот пример:

32 x 13
16 x 26
8 x 52
4 x 104
2 x 208
1 x 416

Деление пополам продолжают до тех пор, пока в частном не получится 1, параллельно удваивая другое число. Последнее удвоенное число и дает искомый результат. Нетрудно понять, на чем этот способ основан: произведение не изменяется, если один множитель уменьшить вдвое, а другой вдвое же увеличить. Ясно поэтому, что в результате многократного повторения этой операции получается искомое произведение:

32 x 13 = 1 x 416.

Задача № 8

Однако как поступить, если при этом приходится делить пополам число нечетное?

Народный способ легко выходит из этого затруднения. Надо - гласит правило, - в случае нечетного числа откинуть единицу и делить остаток пополам; но зато к последнему числу правого столбца нужно будет прибавить все те числа этого столбца, которые стоят против нечетных чисел левого столбца; сумма и будет искомым произведением. Практически это делают так, что все строки с четными левыми числами зачеркивают; остаются только те, которые содержат налево нечетное число. Приведем пример (звездочка указывает, что данную строку надо зачеркнуть):

19 x 17
9 x 34
4 x 68*
2 x 136*

1 x 272.

Сложив незачеркнутые числа, получаем вполне правильный результат: 17 + 34 + 272 = 323.

На чем основан этот прием?

Решение

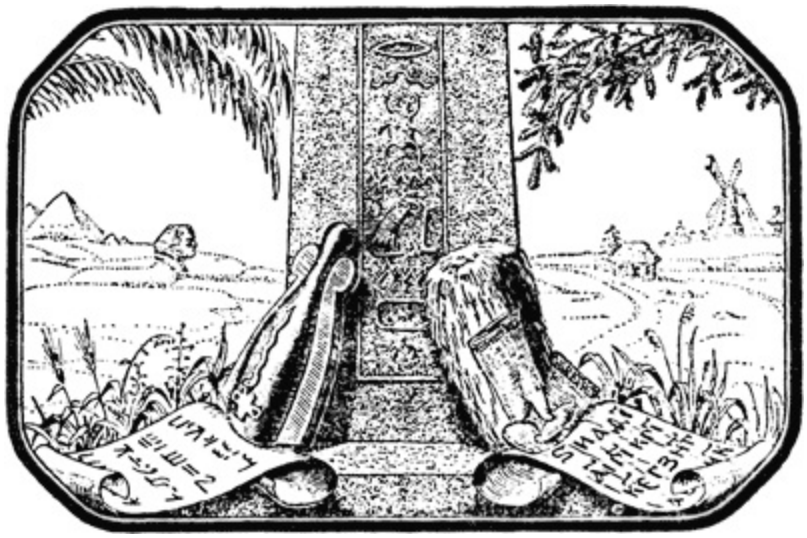
Обоснованность приема станет ясна, если принять во внимание, что

19 x 17 = (18 + 1) x 17 = 18 x 17 + 17,

9 x 34 = (8 + 1) x 34 = 8 x 34 + 34, и т. п.

Ясно, что числа 17, 34 и т. п., утрачиваемые при делении нечетного числа пополам, необходимо прибавить к результату последнего умножения, чтобы получить произведение.

Из страны пирамид



Весьма вероятно, что сейчас описанный способ дошел до нас из глубочайшей древности и из отдаленной страны - из Египта. Мы мало знаем, как производили действия обитатели древней Страны Пирамид. Но сохранился любопытный документ - папирус, на котором записаны

арифметические упражнения ученика одной из землемерных школ древнего Египта; это так называемый «папирус Ринда», относящийся ко времени между 200 и 1700 гг. до нашей эры[56] и представляющий собою копию еще более древней рукописи, переписанную неким Аамесом. Писец[57] Аамес, найдя «ученическую тетрадку» этой отдаленнейшей эпохи, тщательно переписал все арифметические упражнения будущего землемера, - вместе с их ошибками и исправлениями учителя, - и дал своему списку торжественное заглавие, которое дошло до нас в следующем неполном виде:

«Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей… всех тайн, сокрытых в вещах.

Составлено при царе Верхнего и Нижнего Египта Ра-а-усе, дающем жизнь, по образцу древних сочинений времен царя Ра-ен-мата писцом Аамесом».

В этом интересном документе, насчитывающем за собою около 40 веков и свидетельствующем о еще более глубокой древности, мы находим четыре примера умножения, выполненные по способу, живо напоминающему наш русский народный способ. Вот эти примеры (точки впереди чисел обозначают число единиц множителя; знаком + мы отметили числа, подлежащие сложению):

(8×8)	(9×9)
. 8	. 9 +
. . 16	. . 18
. . . . 32	 36
: : : : 64	: : : : 72 +
	Итог. . . . 81

(8×365)	(7×2801)
. 365	. 2801 +
. . 730	. . 5602 +
. . . . 1460	. . . . 11204 +
: : : : 2920	Итог. . 19607

Вы видите из этих примеров, что еще за тысячелетия до нас египтяне пользовались приемом умножения, довольно сходным с нашим крестьянским, и что неведомыми путями он как бы перекочевал из древней Страны Пирамид в современную русскую деревню. Если бы обитателю земли фараонов предложили перемножить, например, 19 x 17, он произвел бы это действие следующим образом: написал бы ряд

последовательных удвоений числа 17:

1	17 +
2	34 +
4	68
8	136
16	272 +

и затем сложил бы те числа, которые отмечены здесь знаком +, т. е. 17 + 34 + 272. Он получил бы, конечно, вполне правильный результат: 17 + (2 x 17) + (16 x 17) = 19 x 17. Легко видеть, что подобный прием по существу весьма близок к нашему «крестьянскому» (замена умножения рядом последовательных удвоений).

Трудно сказать, у одних ли наших крестьян сохранился в настоящее время такой древний способ умножения; английские авторы называют его именно «русским крестьянским способом»; в Германии простой народ кое-где хотя и пользуется им, но также называет его «русским».

Чрезвычайно интересно было бы получить от читателей сведения о том, применяется ли в их местности этот древний способ умножения, имеющий за собой такое долгое и оригинальное прошлое[58].

Следовало бы вообще с большим вниманием относиться к народной математике: вникать в употребляемые народом приемы счета и измерений, собирать и записывать эти памятники народного математического творчества, дошедшие до нашего времени из глубин седой старины. На это уже давно указывал историк математики В. В. Бобынин, предложивший даже краткую программу собирания памятников народной математики. Нелишним будет привести здесь составленный им перечень того, что именно следует собирать и записывать: 1) Счисление и счет. 2) Приемы меры и веса. 3) Геометрические сведения и их выражение в постройках, нарядах и украшениях. 4) Способы межевания. 5) Народные задачи. 6) Пословицы, загадки и вообще произведения народной словесности, имеющие отношение к математическим знаниям. 7) Памятники древней народной математики, находящиеся в рукописях, музеях, коллекциях и т. д. или находимые при раскопках курганов, могил, городищ и пр.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

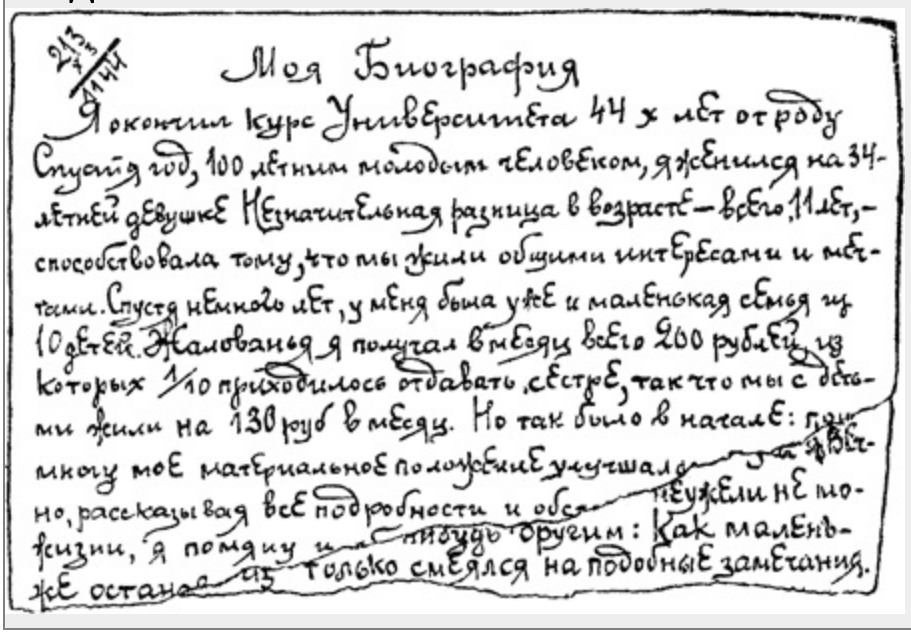
$$91+\frac{5823}{647}=100$$

$$94+\frac{1578}{263}=100$$

$$96+\frac{1428}{357}=100$$

Глава IV

Недесятичные системы счисления



Моя Биография

Я окончил курс Университета 44 х лет от роду
Спустя год, 100 летним молодым человеком, я женился на 34-
летней девушке Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет, —
способствовала тому, что мы жили общими интересами и меч-
тами. Спустя немного лет, у меня была уже и маленькая семья из
10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 рублей, из
которых 1/10 приходилось отдавать сестре, так что мы с дети-
ми жили на 130 руб в месяц. Но так было в начале: по-
многу мое материальное положение улучшал[illegible] я веч-
но, рассказывая все подробности и обс[illegible] неужели не мо-
жизни, я помяну [illegible] нибудь другим: Как малень-
же остан[illegible] только смеялся на подобные замечания.

Загадочная автобиография

Эту главу позволю себе начать с задачи, которую я придумал когда-то для читателей одного распространенного тогда журнала[59] в качестве «задачи на премию». Вот она:

Задача № 9

«Загадочная автобиография»

«В бумагах одного чудака-математика найдена была его автобиография. Она началась следующими строками:

«Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте - всего 11 лет, - способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет, у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 рублей, из которых $^{1}/_{10}$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 руб. в месяц» и т. д.

Чем объяснить странные противоречия в числах этого отрывка?»

Решение

Решение задачи подсказывается названием этой главы: недесятичная система счисления - вот единственная причина кажущейся противоречивости приведенных чисел. Напав на эту мысль, нетрудно догадаться, в какой именно системе счисления изображены числа чудаком-математиком. Секрет выдается фразой: «спустя год (после 44-летнего возраста), 100-летним молодым человеком…» Если от прибавления одной единицы число 44 преображается в 100, то, значит, цифра 4 - наибольшая в этой системе (как 9 - в десятичной), а следовательно, основанием системы является 5. Чудаку-математику пришла фантазия написать все числа своей биографии по пятиричной системе счисления, т. е. по такой, в которой единица высшего разряда не в 10, а в 5 раз больше единицы низшего; на первом справа месте стоят в ней простые единицы (не свыше четырех), на втором - не десятки, а пятерки; на третьем не сотни, а «двадцатипятерки» и т. д. Поэтому число, изображенное в тексте записки «44», означает не 4 x 10 + 4, как в десятичной системе, а 4 x 5 + 4, т. е. двадцать четыре. Точно так же число «100» в автобиографии означает одну единицу третьего разряда в пятиричной системе, т. е. 25. Остальные числа записки соответственно означают:

« 34 » = 3× 5+4 = 19
« 11 » = 5+ 1 = 6
«200» = 2×25 = 50
« $^1/_{10}$ » = $^1/_5$
«130» = 25+3×5 = 40.

Восстановив истинный смысл чисел записки, мы видим, что в ней никаких противоречий нет.

Я окончил курс 24 лет от роду. Спустя год, 25-летним молодым человеком, я женился на 19-летней девушке. Незначительная разница в возрасте - всего 6 лет - способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 5 детей. Жалованья я получал 50 рублей, из которых $^1/_5$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 40 рублей».

Трудно ли изображать числа в других системах счисления? Нисколько. Положим, вы желаете число 119 изобразить в пятиричной системе. Делите 119 на 5, чтобы узнать, сколько в нем единиц первого разряда:

119: 5 = 23, остаток 4.

Значит, число простых единиц будет 4. Далее, 23 пятерки не могут стоять все во втором разряде, так как высшая цифра в пятиричной системе - 4, и больше 4 единиц ни в одном разряде быть не должно. Делим поэтому 23 на 5:

23: 5 = 4, остаток 3.

Это показывает, что во втором разряде («пятерок») будет цифра 3, а в третьем («двадцатипятерок») - 4.

Итак, 119 = 4 x 25 + 3 x 5 + 4, или в пятиричной системе «434».

Сделанные действия для удобства располагают так:

119	5	
4	23	5
	3	*4*

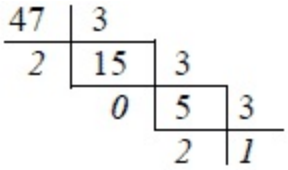
Курсивные цифры (при письме можно их подчеркивать) выписывают справа налево, и сразу получают искомое изображение числа в иной системе.

Приведем еще примеры.

Задача № 10

Изобразить 47 в третичной системе:

Решение

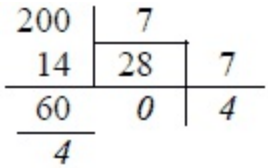


Ответ: «1202». Поверка: 1 х 27 + 2 х 9 + 0 х 9 + 2 = 47.

Задача № 11

Число 200 изобразить в семиричной системе.

Решение

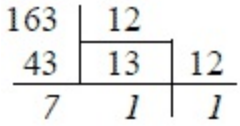


Ответ: «404». Поверка: 4 х 49 + 0 х 7 + 4 = 200.

Задача № 12

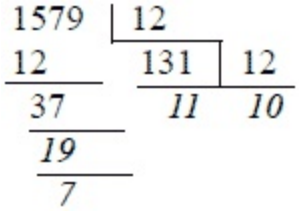
Число 163 изобразить в 12-ричной системе.

Решение



Ответ: «117». Поверка: 1 х 144 + 1 х 12 + 7 = 163.

Думаем, что теперь читатель не затруднится изобразить любое число в какой угодно системе счисления. Единственная помеха может возникнуть лишь вследствие того, что в некоторых случаях не будет доставать изображений для цифр. В самом деле: при изображении числа в системах с основанием более десяти (например в двенадцатиричной) может явиться надобность в цифрах «десять» и «одиннадцать». Из этого затруднения нетрудно выйти, избрав для этих новых цифр какие-нибудь условные знаки или буквы, - хоты бы, например, буквы К и Л, стоящие в русском алфавите на 10-м и 11-м месте. Так, число 1579 в двенадцатиричной системе изобразится следующим образом:



«(10) (11)7», или КЛ 7

Поверка: 10 х 144 + 11 х 12 + 7 = 1579.

Задача № 13

Выразить число 1926 в двенадцатиричной системе[60].

Задача № 14

Выразить число 273 в двадцатиричной системе[61].

Простейшая система счисления

Вообще нетрудно сообразить, что в каждой системе высшая цифра, какая может понадобиться, равна основанию этой системы без единицы. Например, в 10-ичной системе высшая цифра 9, в 6-ричной - 5, в троичной - 2, в 15-ричной - 14, и т. д.

Самая простая система счисления, конечно, та, для которой требуется меньше всего цифр. В десятичной системе нужны 10 цифр (считая и 0), в пятиричной - 5 цифр, в троичной - 3 цифры (1, 2 и 0), в двоичной - только 2 цифры (1 и 0). Существует ли и «единичная» система? Конечно: это система, в которой единицы высшего разряда в один раз больше единицы низшего, т е. равны ей; другими словами, «единичной» можно назвать такую систему, в которой единицы всех разрядов имеют одинаковое значение. Это самая примитивная «система»; ею пользуется первобытный человек, делая на дереве зарубки по числу сосчитываемых предметов. Но между нею и всеми другими системами счета есть громадная разница: она лишена главного преимущества нашей нумерации - так называемого поместного значения цифр. Действительно: в «единичной» системе знак, стоящий на 3-м или 5-м месте, имеет то же значение, что и стоящий на первом месте. Между тем даже в двоичной системе единица на 3-м месте (справа) уже в 4 раза (2 х 2) больше, чем на первом, а на 5-м - в 16 раз больше (2 х 2 х 2 х 2). Поэтому система «единичная» дает очень мало выгоды, так как для изображения какого-нибудь числа по этой системе нужно ровно столько же знаков, сколько было сосчитано предметов: чтобы записать сто предметов нужно сто знаков, в двоичной же - только семь («1100100»), а в пятиричной - всего три («400»).

Вот почему «единичную» систему едва ли можно назвать «системой»; по крайней мере, ее нельзя поставить рядом с остальными,

так как она принципиально от них отличается, не давая никакой экономии в изображении чисел. Если же ее откинуть, то простейшей системой счисления нужно признать систему двоичную, в которой употребляются всего две цифры: 1 и 0. При помощи 1-цы и 0 можно изобразить все бесконечное множество чисел! На практике система эта мало удобна - получаются слишком длинные числа[62]; но теоретически она имеет все права считаться простейшей. Она обладает некоторыми любопытными особенностями, присущими только ей одной; особенностями этими, между прочим, можно воспользоваться для выполнения ряда эффектных математических фокусов, о которых мы скоро побеседуем подробно в главе «Фокусы без обмана».

Необычайная арифметика

Задача № 15

К арифметическим действиям мы привыкли настолько, что выполняем их автоматически, почти не думая о том, что мы делаем. Но те же действия потребуют от нас немалого напряжения, если мы пожелаем применить их к числам, написанным не по десятичной системе. Попробуйте, например, выполнить сложение следующих двух чисел, написанных по пятиричной системе:

$$\begin{array}{r} \text{«4203»} \\ +\ \text{«2132»} \\ \hline \end{array} \quad \text{(по пятиричной системе).}$$

Решение

Складываем по разрядам, начиная с единиц, т. е. справа: 3 + 2 равно

пяти; но мы не можем записать 5, потому что такой цифры в пятиричной системе не существует: пять есть уже единица высшего разряда. Значит, в сумме вовсе нет единиц; пишем 0, а пять, т. е. 1-цу следующего разряда, удерживаем в уме. Далее, 0 + 3 = 3, да еще 1-ца, удержанная в уме, - всего 4 единицы второго разряда. В третьем разряде получаем 2 + 1 = 3. В четвертом 4 + 2 равно шести, т. е. 5 + 1; пишем 1, а 5, т. е. 1-цу высшего разряда, относим далее влево. Искомая сумма - 11340.

$$\begin{array}{l} \text{«4203»} \\ +\ \text{«2132»} \\ \hline \text{«11340»} \end{array} \quad \text{(в пятиричной системе).}$$

Предоставляем читателю проверить это сложение, предварительно переведя изображенные в кавычках числа в 10-ичную систему и выполнив то же действие.

Точно так же выполняются и другие действия. Для упражнения приводим далее ряд примеров, число которых читатель, при желании, может увеличить самостоятельно:

Задача № 16 Задача № 17 Задача № 18

По пятиричной системе

$$\begin{array}{r} \text{«2143»} \\ -\ \text{«334»} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{«213»} \\ \times\ \text{«3»} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{«42»} \\ \times\ \text{«31»} \\ \hline \end{array}$$

Задача № 19 Задача № 20 Задачи № 21 и № 22

По троичной системе

$$\begin{array}{r} \text{«212»} \\ +\ \text{«120»} \\ \text{«201»} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{«122»} \\ \times\ \text{«20»} \\ \hline \end{array} \qquad \text{«220» : 2} \qquad \text{«201» : 12}$$

Ответы:

№ 16 — «1304». № 17 — «1144». №18 — «2402». № 19 — «2010». № 20 — «10210». № 21 — «110». № 22 — «10», остаток «11».

При выполнении этих действий мы сначала мысленно изображаем написанные числа в привычной нам десятичной системе, а получив результат, снова изображаем его в требуемой недесятичной системе. Но можно поступать и иначе: составить «таблицу сложения» и «таблицу умножения» в тех же системах, в которых даны нам числа, и пользоваться ими непосредственно. Например, таблица сложения в пятиричной системе такова:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

С помощью этой таблички мы могли бы сложить числа «4203» и «2132», написанные в пятиричной системе, гораздо менее напрягая внимание, чем при способе, примененном раньше.

Упрощается, как легко понять, также выполнение вычитания.

Задача № 23

Составим и таблицу умножения («Пифагорову») для пятиричной системы.

Решение

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Имея эту табличку перед глазами, вы опять-таки можете облегчить себе труд умножения (и деления) чисел в пятиричной системе, - как легко убедиться, применив ее к приведенным выше примерам. Например, при умножении

по пятиричной системе

«213»
× «3»
«1144»

рассуждаем так: трижды три «14» (из таблицы); 4 пишем, 1 - в уме. Один на 3 дает 3, да еще один, - пишем 4. Дважды три = «11»; 1 - пишем, 1 - переносим влево. Получаем в результате «1144».

Чем меньше основание системы, тем меньше и соответствующие таблицы сложения и умножения. Например, для троичной системы обе таблицы таковы:

Таблица сложения для 3-ной системы.

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Пифагорова таблица для 3-ной системы:

1	2
2	11

Их можно было бы сразу же запомнить и пользоваться ими для выполнения действий. Самые маленькие таблицы сложения и вычитания получаются для двоичной системы:

Таблица сложения для двоичной системы:

0	1
1	10

Таблица умножения для двоичной системы:

1×1=1

При помощи таких-то простых «таблиц» можно выполнять в двоичной системе все четыре действия! Ум - ножения в этой системе, в сущности, как бы и вовсе нет: ведь умножить на единицу значит оставить число без изменения: умножение же на «10», 100», «1000» (т. е. на 2, на 4, на 8) сводится к простому приписыванию справа соответствующего числа нулей. Что же касается сложения, то для выполнения его нужно помнить только одно - что в двоичной системе 1 + 1 = 10. Не правда ли, мы с полным основанием назвали раньше двоичную систему самой простой из всех возможных? Длинота чисел этой своеобразной арифметики искупается простотой выполнения над ними всех арифметических действий. Пусть требуется, например, умножить:

В двоичной системе

«1001011101»
× «100101»
«1001011101»
+ «1001011101»
«1001011101»
«101011101110001»

Выполнение действия сводится только к переписыванию данных чисел в надлежащем расположении: это требует несравненно меньших умственных усилий, чем умножение тех же чисел в десятичной системе (605 x 37 = 22385). Если бы у нас была принята двоичная система, изучение письменного счисления требовало бы наименьшего напряжения мысли (зато - наибольшего количества бумаги и чернил). Однако в устном счете двоичная арифметика по удобству выполнения действий значительно уступает нашей десятичной.

Чет или нечет?

Задача № 24

Не видя числа, трудно, конечно, угадать, какое оно - четное или нечетное. Но не думайте, что вы всегда сможете сказать это, едва увидите задаваемое число. Скажите, например, четное или нечетное число 16?

Если вам известно, что оно написано по десятичной системе, то, без сомнения, можно утверждать, что число это - четное. Но когда оно написано по какой-либо другой системе - можно ли быть уверенным, что оно изображает непременно четное число?

Решение

Оказывается, нет. Если основание, например, семь, то «16» означает 7 + 6 = 13, число нечетное. То же будет и для всякого нечетного основания (потому что всякое нечетное число + 6 = нечетному числу).

*** * ***

Отсюда вывод, что знакомый нам признак делимости на два (последняя цифра четная) безусловно пригоден только для 10-тичной системы счисления, для других же - не всегда. А именно, он верен только для систем счисления с четным основанием: 6-ричной, 8-ричной и т. п. Каков же признак делимости на 2 для систем с нечетным

основанием? Достаточно краткого размышления, чтобы установить его: сумма цифр должна быть четной. Например, число «136» четное во всякой системе счисления, даже и с нечетным основанием: действительно, в последнем случае имеем: нечетные числа[63] + нечетное число + четное = четному числу.

С такою же осторожностью надо отнестись к задаче: всегда ли число 25 делится на 5? В 7-ричной или в 8-ричной системе число, так изображенное, на 5 не делится (потому что оно равно девятнадцати или двадцати одному). Точно так же общеизвестный признак делимости на 9 (сумма цифр…) правилен только для десятичной системы. Напротив, в пятиричной системе тот же признак применим для делимости на 4, а, например, в семиричной - на 6. Так, число «323» в пятиричной системе делится на 4, потому что 3 + 2 + 3 = 8, а число «51» в семиричной - на 6 (легко убедиться, переведя числа в десятичную систему: получим соответственно 88 и 36). Почему это так, читатель сам сможет сообразить, если вникнет хорошенько в вывод признака делимости на 9 и приложит те же рассуждения, соответственно измененные, например, к семиричной системе для вывода признака делимости на 6.

Труднее доказать чисто арифметическим путем справедливость следующих положений:

$$\left.\begin{array}{l} 121 : 11 = 11 \\ 144 : 12 = 12 \\ 21 \times 21 = 441 \end{array}\right\} \text{во всех системах счисления (где имеются соответств. цифры).}$$

Знакомые с начатками алгебры легко найдут основание, объясняющее свойство этих равенств. Остальные читатели могут проверить их рядом проб для разных систем счисления.

Дроби без знаменателя

Мы привыкли к тому, что без знаменателя пишутся только десятичные дроби. Поэтому с первого взгляда кажется, что написать прямо без знаменателя дробь $^2/_7$ или $^1/_3$ нельзя. Дело представится нам, однако, иначе, если вспомним, что дроби без знаменателя возможны и в других системах счисления. Что, например, означает дробь «0,4» в

пятиричной системе? Конечно, $^{4}/_{5}$. Дробь «1,2» в семиричной системе означает $1\ ^{2}/_{7}$. А что означает в той же семиричной системе дробь «0,33»? Здесь результат сложнее: $^{3}/_{7} + {}^{3}/_{49} = {}^{24}/_{49}$.

Задача № 25

Рассмотрим еще несколько недесятичных дробей без знаменателя. Чему равны

a) «2,121» в троичной системе?

b) «1,011» в двоичной системе?

c) «3,431» в пятиричной системе?

d) «2,(5)» в семиричной системе?

Ответы:

a) $2 + {}^{1}/_{3} + {}^{2}/_{9} + {}^{1}/_{27} = 2\ ^{16}/_{27}$

b) $1 + {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{8} = 1\ ^{3}/_{8}$

c) $3 + {}^{4}/_{5} + {}^{3}/_{25} + {}^{1}/_{125} = 3\ ^{116}/_{125}$

d) $2 + {}^{5}/_{7} + {}^{5}/_{49} + {}^{5}/_{343} = 2\ ^{285}/_{343} = 2\ ^{5}/_{6}$.

В правильности последнего равенства читатель легко может убедиться, если попробует применить к данному случаю, с соответствующим видоизменением, рассуждения, относящиеся к превращению десятичных периодических дробей в простые.

В заключение рассмотрим еще две задачи особого рода:

Задача № 26

По какой системе счисления выполнено следующее сложение:

$$\begin{array}{r} 756 \\ 307 \\ +\ 2456 \\ 24 \\ \hline 3767. \end{array}$$

Задача № 27

По какой системе счисления выполнено деление:

$$\begin{array}{l} 4415400 \ : \ 4532 = 543 \\ 40344 \\ \hline 34100 \\ 31412 \\ \hline 22440 \\ 22440 \\ \hline 0. \end{array}$$

Ответы:

№ 26 — по восьмеричной;
№ 27 — по шестеричной

Задача № 28

Напишите число сто тринадцать во всех системах счисления до девятиричной включительно.

(Решение см. на стр. 231.)

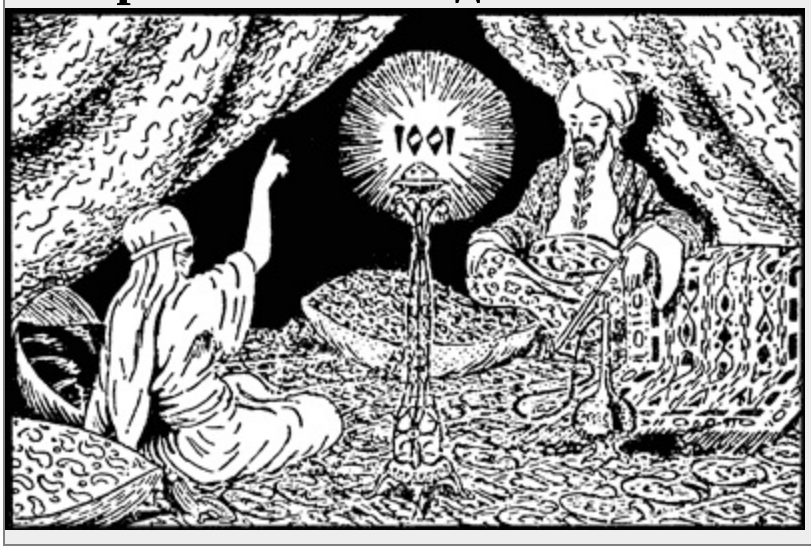
Задача № 29

Чему равно число «123», если считать его написанным во всех системах счисления до девятиричной включительно? Возможно ли, что оно написано по двоичной системе? А по троичной? Если оно написано по пятиричной системе, то можете ли вы узнать, не переписывая его по десятичной системе, делится ли оно без остатка на два? Если оно написано по семиричной системе, то делится ли оно без остатка на шесть? Если оно написано по девятиричной системе, то делится ли оно без остатка на четыре?

(Решение см. на стр. 256.)

Глава V

Галерея числовых диковинок



Арифметическая кунсткамера

В мире чисел, как и в мире живых существ, встречаются подлинные диковинки, редкие экземпляры, обладающие исключительными свойствами. Из таких необыкновенных чисел можно было бы составить своего рода музей числовых редкостей, настоящую «арифметическую кунсткамеру». В ее витринах нашли бы себе место не только числовые исполины, о которых мы побеседуем еще в особой главе, но и числа сравнительно небольшие, зато выделяющиеся из ряда других какими-либо необычайными свойствами. Некоторые из них уже по внешности привлекают к себе внимание; другие открывают свои диковинные особенности лишь при более близком знакомстве.

Приглашаю читателя пройтись со мною по галерее таких числовых диковинок и познакомиться с некоторыми из них.

Пройдем, не останавливаясь, мимо первых витрин, заключающих числа, свойства которых нам уже знакомы. Мы знаем уже, почему попало в галерею диковинок число 2: не потому, что оно первое четное число, а потому, что оно - основание самой удобной системы счисления (см. стр. 191).

Не удивимся мы, встретив тут 5 - одно из наших любимейших чисел, играющее важную роль при всяких «округлениях», в том числе и при округлении цен, которое обходится нам так дорого (см. стр. 154). Не будет неожиданностью для нас найти здесь и число 9, - конечно, не как «символ постоянства»[64], а как число, облегчающее нам поверку всех арифметических действий (см. стр. 174). Но вот витрина, за стеклом которой мы видим -

Число 12

Чем оно замечательно? Конечно, это число месяцев в году и число единиц в дюжине. Но что, в сущности, особенного в дюжине? Немногим известно, что 12 - старинный и едва не победивший соперник числа 10 в борьбе за почетный пост основания системы счисления. Культурнейший народ древнего Востока - вавилоняне и их

предшественники, еще более древние жители Двуречья - вели счет в 12-ричной системе счисления. И если бы не пересилившее влияние Индии, подарившей нам 10-тичную систему, мы, весьма вероятно, унаследовали бы от Вавилона 12-ричную систему. Кое в чем мы и до сих пор платим дань этой системе, несмотря на победу 10-тичной. Наше пристрастие к дюжинам и гроссам, наше деление суток на две дюжины часов, деление часа - на 5 дюжин минут, деление минуты - на столько же секунд, деление круга на 30 дюжин градусов, наконец, деление фута на 12 дюймов - разве не свидетельствует все это о том, как велико еще влияние этой древней системы?

Хорошо ли, что в борьбе между дюжиной и десяткой победила последняя? Конечно, сильными союзницами десятки были и остаются наши собственные руки с десятью пальцами, - живые счетные машины. Но если бы не это, то следовало бы безусловно отдать предпочтение 12-ти перед 10. Гораздо удобнее производить расчеты по 12-ричной системе, нежели по 10-тичной. Причина та, что число 10 делится без остатка только на 2 и на 5, между тем как 12 делится и на 2, и на 3, и на 4, и на 6. У 10 всего два делителя, у 12 - четыре. Преимущества 12-ричной системы станут вам яснее, если вы примете в соображение, что в 12-ричной системе число, оканчивающееся нулем, кратно и 2, и 3, и 4, и 6; подумайте, как удобно дробить число, когда и $^1/_2$, и $^1/_3$, и 1 $^1/_4$ и $^1/_6$ его должны быть целыми числами! А если выраженное в 12-ричной системе число оканчивается двумя нулями, то оно должно делиться без остатка на 144, а следовательно, и на все множители 144-х, т. е. на следующий длинный ряд чисел:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Четырнадцать делителей - вместо тех восьми, которые имеют числа, написанные в 10-тичной системе, если оканчиваются двумя нулями (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100). В нашей системе только дроби вида $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{20}$ и т. д. превращаются в конечные десятичные; в 12-ричной же системе можно написать без знаменателя гораздо более разнообразные дроби, и прежде всего дроби:

$^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{12}$, $^1/_{16}$, $^1/_{18}$, $^1/_{24}$, $^1/_{36}$, $^1/_{48}$, $^1/_{72}$, $^1/_{144}$,

которые соответственно изобразятся так:

0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09; 0,08; 0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01.

Было бы, однако, большим заблуждением думать, что делимость

числа может зависеть от того, в какой системе счисления оно изображено. Если орехи, заключающиеся в данном мешке, могут быть разложены в 5 одинаковых кучек, то это свойство их, конечно, не изменится оттого, будет, ли наше число орехов выражено в той или иной системе счисления, или отложено на счетах, или написано прописью, или, наконец, изображено каким-либо иным способом. Если число, написанное в 12-ричной системе, делится на 6 или на 72, то, будучи выражено в другой системе счисления, например в 10-тичной, оно должно иметь тех же делителей. Разница лишь в том, что в 12-ричной системе делимость на 6 или на 72 легче обнаружить (число оканчивается одним или двумя нулями). Когда говорят о преимуществах 12-тиричной системы в смысле делимости на большое число делителей, то имеют в виду, что благодаря склонности нашей «к круглым» числам на практике будут чаще встречаться числа, оканчивающиеся, в 12-ричной системе, нулями.

При таких преимуществах 12-ричной системы неудивительно, что среди математиков раздавались голоса за полный переход на эту систему. Однако мы уже чересчур тесно сжились с 10-тичной системой, чтобы решаться на такую реформу.

Вы видите, следовательно, что дюжина имеет за собою длинную историю и что число 12 не без основания очутилось в галлерее числовых диковинок. Зато его соседка - «чертова дюжина», 13, фигурирует здесь не потому, что чем-либо замечательна, а скорее именно потому, что ничем не замечательна, хотя и пользуется такой мрачной славой: разве не удивительно в самом деле, что ровно ничем не выделяющееся число могло стать столь «страшным» для суеверных

людей?[65]

В следующей витрине арифметической кунсткамеры перед нами

Число 365

Оно замечательно прежде всего тем, что определяет число дней в году. Далее, при делении на 7 оно дает в остатке 1: эта несущественная, казалось бы, особенность числа 365 имеет большое значение для календаря. От нее зависит то, что каждый простой (не високосный) год кончается тем днем недели, каким он начался; если, например, день нового года был понедельник, то и последний день года будет понедельник, а следующий год начнется со вторника. По той же причине - благодаря остатку 1 от деления 365 на 7 - было бы нетрудно так изменить наш календарь, чтобы определенная календарная дата всегда приходилась на один и тот же день недели, - например, чтобы 1-го мая каждый год было воскресенье. Для этого достаточно было бы лишь первый день года вовсе не вводить в счет числа дней, называя его не «1 января», а просто «день нового года»; 1-м января будет следующий день. Тогда остальное число дней года, 364, будет заключать целое число недель; следовательно, весь ряд дальнейших лет будет начинаться тем же днем недели, и все даты из года в год будут повторяться в одни и те же дни. В годы високосные, заключающие 366 дней, надо будет уже первые два дня года оставить вне счета, «новогодние».

Любопытна и другая особенность числа 365, не связанная с календарем:

365 = 10 x 10 + 11 x 11 + 12 x 12,

то есть 365 равно сумме квадратов трех последовательных чисел, начиная с 10-ти:

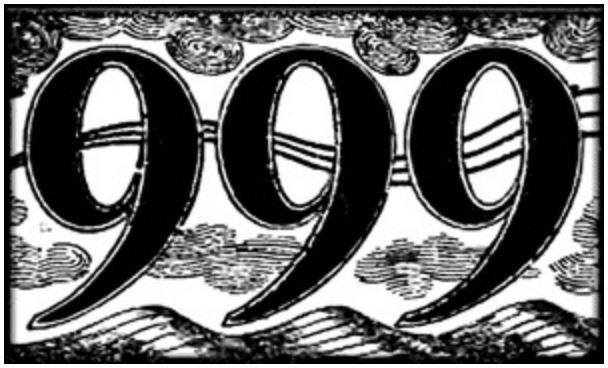
$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365.$

Но и это еще не все: тому же равна сумма квадратов двух следующих чисел - 13 и 14:

$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365.$

Таких чисел не много наберется в нашей галлерее арифметических диковинок.

Три девятки



В следующей витрине выставлено наибольшее из всех трехзначных чисел: 999. Оно, без сомнения, гораздо удивительнее, чем его перевернутое изображение - 666, знаменитое «звериное число» Апокалипсиса, вселявшее нелепый страх многим суеверным людям, но по арифметическим свойствам ничем не выделяющееся среди прочих чисел. Любопытная особенность числа 999 проявляется при умножении на него всякого другого трехзначного числа. Тогда получается шестизначное произведение; первые три цифры его есть умножаемое число, только уменьшенное на 1-цу, а остальные три цифры (кроме последней) - «дополнения» первых до 9. Например:

$$\begin{array}{r} 572 \\ 573\times999 = \underline{572427} \\ 999. \end{array}$$

Стуит лишь взглянуть на следующую строку, чтобы понять происхождение этой особенности:

$$573\times999 = 573\times(1000-1)= \begin{cases} 573000 \\ -\quad 573 \\ \hline 572427. \end{cases}$$

Зная эту особенность, мы можем «мгновенно» умножать любое трехзначное число на 999.

947 х 999 = 946053;

509 х 999 = 508491;

981 х 999 = 980019; и т. п.

А так как 999 = 9 х 111 = 3х3х3х37, то вы можете, опять-таки с молниеносной быстротой, писать целые колонны шестизначных чисел, кратных 37; незнакомый со свойствами числа 999, конечно, сделать этого не в состоянии. Короче говоря, вы можете устраивать перед непосвященными маленькие сеансы «мгновенного умножения и деления» не хуже иного фокусника.

Число шехеразады

Следующее на очереди у нас число 1001, - прославленное число Шехеразады. Вы, вероятно, и не подозревали, что в самом названии сборника волшебных арабских сказок заключается также своего рода чудо, которое могло бы поразить воображение сказочного султана не менее многих других чудес Востока, если бы он способен был интересоваться арифметическими диковинками.

Чем же так замечательно число 1001? С виду оно кажется весьма обыкновенным. Оно даже не принадлежит к избранному разряду так называемых «простых» чисел. Через ячейки Эратосфенова решета оно

свободно проскользнуло бы, так как делится без остатка и на 7, и на 11, и на 13 - на три последовательных простых числа, произведением которых оно и является. Но в том, что число 1001 = 7x11x13, нет еще ничего волшебного. Замечательнее то, что при умножении на него трехзначного числа получается результат, состоящий из самого умноженного числа, только написанного дважды, например:

873 x 1001 = 873873;

207 x 1001 = 207207; и т. д.

И хотя этого и следовало ожидать, так как 873 x 1001 = 873 x 1000 + 873 = 873000 + 873, - все же, пользуясь указанным свойством «числа Шехеразады», можно достичь результатов совсем неожиданных, - по крайней мере, для человека неподготовленного.

Задача № 30

Целое общество гостей, непосвященных в арифметические тайны, вы можете поразить следующим фокусом. Пусть кто-нибудь напишет на бумажке, секретно от вас, трехзначное число, какое хочет, и затем пусть припишет к нему еще раз то же самое число. Получится шестизначное число, составленное из трех повторяющихся цифр. Предложите тому же товарищу, или его соседу, разделить - секретно от вас - это число на 7; при этом вы заранее предсказываете, что остатка не получится. Результат деления передается соседу, который, по вашему предложению, делит его на 11; и хотя вы не знаете делимого, вы все же смело утверждаете, что и оно разделится без остатка. Полученный результат вы направляете следующему соседу, которого просите разделить это число на 13 - деление снова выполняется без остатка, о чем вы заранее предупреждаете. Результат третьего деления вы, не глядя на полученное число, вручаете первому товарищу со словами:

- Вот число, которое вы задумали!

Так и есть: вы угадали.

Какова разгадка этого фокуса?

Решение

Этот красивый арифметический фокус, производящий на непосвященных впечатление волшебства, объясняется очень просто: вспомните, что приписать к трехзначному числу его само - значит умножить его на 1001, т. е. на произведение 7x11x13. Шестизначное число, которое ваш товарищ получит после того, как припишет к задуманному числу его само, должно будет поэтому делиться без остатка и на 7, и на 11, и на 13; а в результате деления последовательно на эти три числа (т. е. на их произведение - 1001) оно должно, конечно, снова дать задуманное число.

Число 10101

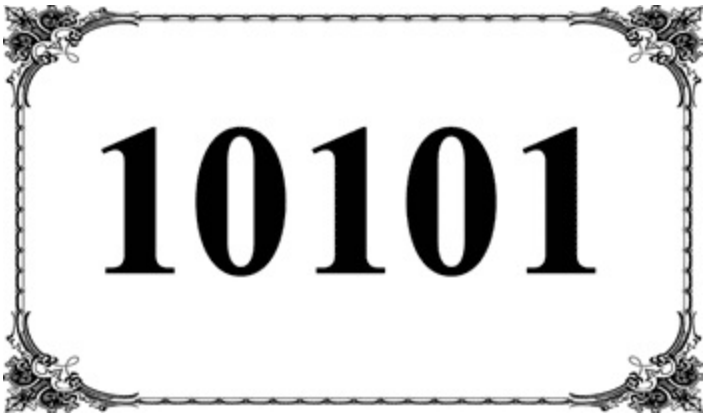
После сказанного о числе 1001 для вас уже не будет неожиданностью увидеть в витринах нашей галлереи число 10101. Вы догадаетесь, какому именно свойству обязано число это такою честью. Оно, как и число 1001, дает удивительный результат при умножении, - но не трехзначных чисел, а двузначных; каждое двузначное число, умноженное на 10101, дает в результате само себя, написанное трижды. Например:

73 x 10101 = 737373;

21 x 10101 = 212121.

Причина уясняется из следующей строки:

$$73\times10101 = 73\times(10000+100+1) = \begin{cases} 730000 \\ +\ \ 7300 \\ \qquad 73 \\ \hline 737373. \end{cases}$$



Задача № 31

Можно ли проделывать с помощью этого числа фокусы необычайного отгадывания, как с помощью числа 1001?

Решение

Да, можно. Здесь даже возможно обставить фокус эффектнее, разнообразнее, если иметь в виду, что 10101 есть произведение четырех простых чисел:

10101 = 3x7x13x37.

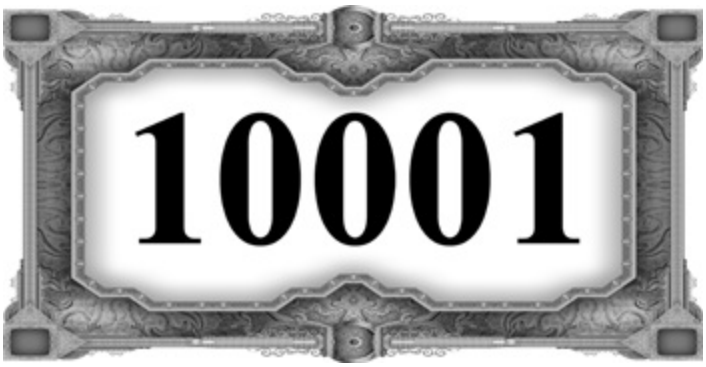
Предложив первому гостю задумать какое-нибудь двузначное число, вы предлагаете второму приписать к нему то же число, а третьему приписать то же число еще раз. Четвертого гостя вы просите разделить получившееся шестизначное число, например, на 7; пятый гость должен разделить полученное частное на 3; шестой гость делит то, что получилось, на 37 и, наконец, седьмой делит этот результат на 13, - при чем все 4 деления выполняются без остатка. Результат последнего деления вы просите передать первому гостю: это и есть задуманное им число.

При повторении фокуса вы можете внести в него некоторое

разнообразие, обращаясь каждый раз к новым делителям. А именно, вместо четырех множителей 3x7x13x37 можете взять следующие группы трех множителей: 21x13x37; 7x39x37; 3x91x37; 7x13x111.

Число это - 10101 - пожалуй, даже удивительнее волшебного числа Шехеразады, хотя и менее его известно своими поразительными свойствами. А между тем о нем писалось еще двести лет тому назад в «Арифметике» Магницкого, в той главе, где приводятся примеры умножения «с некоим удивлением». Тем с большим основанием должны мы включить его в наше собрание арифметических диковинок.

Число 10001



Задача № 32

С этим числом вы также можете проделать фокусы вроде предыдущих, хотя, пожалуй, и не столь эффектные.

Дело в том, что оно представляет собою произведение только двух простых чисел:

10001 = 73 x 137.

Как воспользоваться этим для выполнения арифметических фокусов, читатель, надеюсь, после всего сказанного выше догадывается сам.

Шесть единиц

В соседней витрине мы видим такую диковинку арифметической кунсткамеры:

- число, состоящее из шести единиц. Благодаря знакомству с волшебными свойствами числа 1001, мы сразу соображаем, что

111111 = 111 x 1001.

Но 111 = 3x37, а 1001 = 7x11x13. Отсюда следует, что наш новый числовой феномен, состоящий из одних лишь единиц, представляет собою произведение пяти простых множителей. Соединяя же эти 5 множителей в две группы на всевозможные лады, мы получаем 15 пар множителей, дающих в произведении одно и то же число 111111:

3 x (7 x 11 x 13 x 37) = 3 x 37037 = 111111
7 x (3 x 11 x 13 x 37) = 7 x 15873 = 111111
11 x (3 x 7 x 13 x 37) = 11 x 10101 = 111111
13 x (3 x 7 x 11 x 37) = 13 x 8547 = 111111
37 x (3 x 7 x 11 x 13) = 37 x 3003 = 111111
(3 x 7) x (11 x 13 x 37) = 21 x 5291 = 111111
(3 x 11) x (7 x 13 x 37) = 33 x 3367 = 111111 и т. д.

Вы можете, значит, засадить общество из 15 человек за работу умножения, и хотя каждый будет перемножать другую пару чисел, все получат один и тот же оригинальный результат: 111111.

Задача № 33

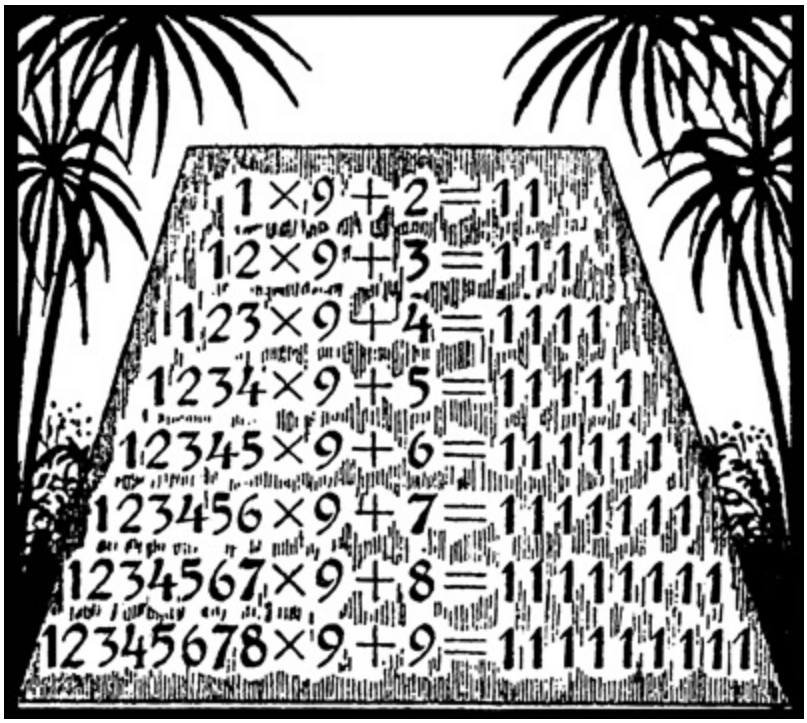
То же число 111111 пригодно и для отгадывания задуманных чисел

наподобие того, как выполняется это с помощью чисел 1001 и 10101. В данном случае нужно предлагать задумывать число однозначное, т. е. одну цифру, и повторять ее 6раз. Делителями здесь могут служить пять простых чисел: 3, 7, 11, 13, 37 и получающиеся из них составные: 21, 33, 39 и т. д. Это дает возможность до крайности разнообразить выполнение фокуса. Как надо поступать в этих случаях, - предоставляю придумать читателю.

Числовые пирамиды

В следующих витринах галлереи нас поражают числовые достопримечательности совсем особого рода - некоторое подобие пирамид, составленных из чисел. Рассмотрим поближе первую из таких «пирамид».

Задача № 34



Как объяснить эти своеобразные результаты умножения, эту странную закономерность?

Решение

Возьмем для примера какой-нибудь из средних рядов нашей числовой пирамиды: 123456 x 9 + 7. Вместо умножения на 9 можно умножить на (10 - 1), т. е. приписать 0 и вычесть умножаемое:

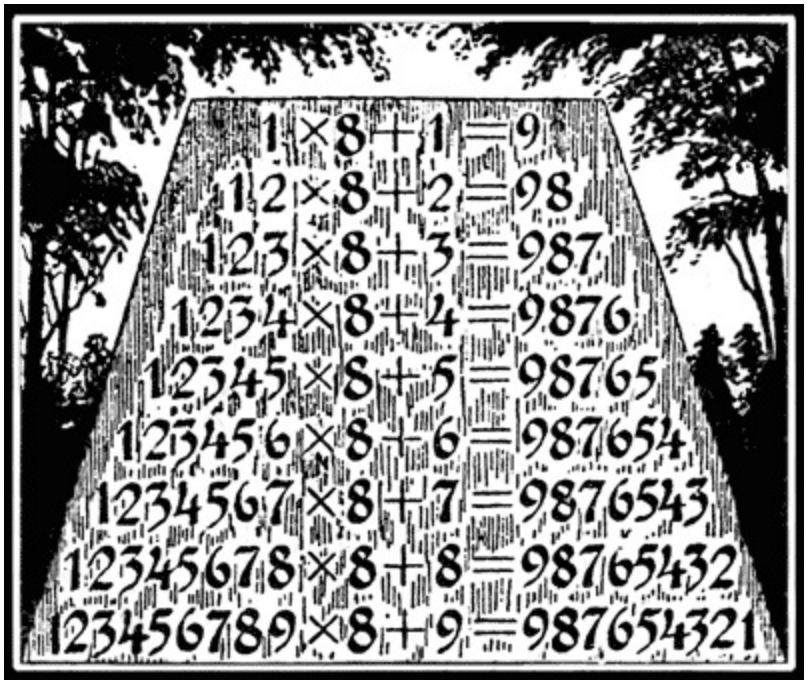
$$123456\times9+7 = 1234560+7-123456 = \begin{cases} 1234567 \\ -\ 123456 \\ \hline 1111111. \end{cases}$$

Достаточно взглянуть на последнее вычитание, чтобы понять, почему тут получается результат, состоящий только из одних единиц.

Мы можем понять это, исходя и из других рассуждений. Чтобы число вида 12345… превратилось в число вида 11111…, нужно из второй его цифры вычесть 1, из третьей - 2, из четвертой - 3, из пятой - 4 и т. д.; иначе говоря, вычесть из него то же число вида 12345…, лишенное своей последней цифры, - т. е. вдесятеро уменьшенное и

предварительно сокращенное на последнюю цифру. Теперь понятно, что для получения искомого результата нужно наше число умножить на 10, прибавить к нему следующую за последней цифру и вычесть из результата первоначальное число (а умножить на 10 и отнять множимое - значит, умножить на 9).

Задача № 35



Сходным образом объясняется образование и следующей числовой пирамиды, получающейся при умножении определенного ряда цифр на 8 и прибавлении последовательно возрастающих цифр. Особенно интересна в этой пирамиде последняя строка, где в результате умножения на 8 и прибавления 9 происходит превращение полного натурального ряда цифр в такой же ряд, но с обратным расположением.

Попытайтесь объяснить эту особенность.

Решение

Получение таких странных результатов уясняется из следующей строки:

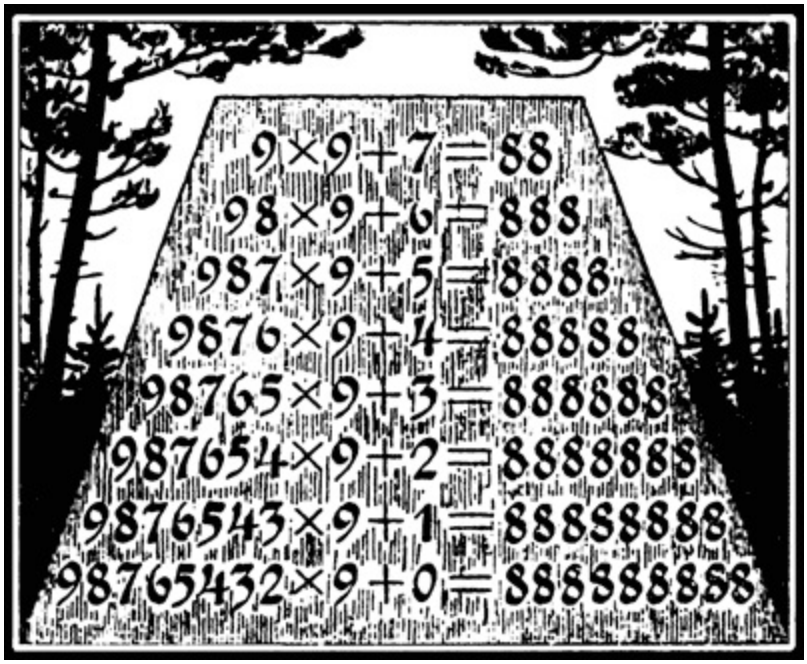
$$12345\times8+5 = \left\{ \begin{matrix} - & 12345\times9+6 \\ & 12345\times1+1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} - & 111111^{*} \\ & 12346, \end{matrix} \right.$$

** Почему 12345 x 9 + 6 дает именно 111111, было показано при рассмотрении предыдущей числовой пирамиды.*

то есть 12345 x 8 + 5 = 111111 - 12346. Но вычитая из числа 111111 число 12346, составленное из ряда возрастающих цифр, мы, как легко понять, должны получить ряд убывающих цифр 98765.

Задача № 36

Вот, наконец, третья числовая пирамида, также требующая объяснения:



Решение

Эта пирамида есть прямое следствие первых двух. Связь устанавливается очень легко. Из первой пирамиды мы знаем уже, что, например:

12345 x 9 + 6 = 111111.

Умножив обе части на 8, имеем:

(12345 x 8 x 9) + (6 x 8) = 888888.

Но из второй пирамиды мы знаем, что

12345 x 8 + 5 = 98765, или 12345 x 8 = 98760.

Значит:

888888 = (12345 x 8 x 9) + (6 x 8) = (98760 x 9) + 48 = (98760 x 9) + (5 x 9) + 3 = (98760 + 5) x 9 + 3 = 98765 x 9 + 3.

Вы убеждаетесь, что оригинальные числовые пирамиды не так уже загадочны, как кажутся с первого взгляда. Курьезно, что мне случилось как-то видеть их напечатанными в одной немецкой газете с припиской: «Причина такой поразительной закономерности никем еще до сих пор не была объяснена»…

Девять одинаковых цифр

Задача № 37

Конечная строка первой из сейчас (стр. 215) рассмотренных «пирамид»:

12345678 x 9 + 9 = 111111111

представляет образчик целой группы интересных арифметических курьезов, собранных в нашем музее в следующую таблицу:

Откуда такая закономерность в результатах?

Решение

Примем во внимание, что
12345678 x 9 + 9 = (12345678 + 1) x 9 = 12345679 x 9.
Поэтому
12345679 x 9 = 111111111.
А отсюда прямо следует, что
12345679 x 9 x 2 = 222222222
12345679 x 9 x 3 = 333333333
12345679 x 9 x 4 = 444444444 и т. д.

Цифровая лестница

Задача № 38

Что получится, если число 111111111, с которым мы сейчас имели дело, умножить само на себя? Заранее можно предвидеть, что результат должен быть диковинный, - но какой именно?

Решение

Если вы обладаете способностью отчетливо рисовать в воображении ряды цифр, вам удастся найти интересующий нас результат, даже не прибегая к выкладкам на бумаге. В сущности здесь дело сводится только к надлежащему расположению частных произведений, потому что умножать приходится все время лишь единицу на единицу - действие, могущее затруднить разве лишь Фонвизинского Митрофанушку, размышляющего о результате умножения «единожды один». Сложение же частных произведений сводится к простому счету единиц[66]. Вот результат этого единственного в своем роде умножения (при выполнении которого, впрочем, не приходится ни разу прибегать к действию умножения):

```
    111111111
    111111111
    ---------
    111111111
   111111111
  111111111
 111111111
111111111
 111111111
  111111111
   111111111
    ---------
123456789 87654321.
```

Все девять цифр выстроены в стройном порядке, симметрично убывая от середины в обе стороны.

*** * ***

Те из читателей, которых утомило обозрение числовых диковинок, могут покинуть здесь эту галерею и перейти в следующие отделения, где показываются фокусы и выставлены числовые великаны и карлики; я хочу сказать, - они могут прекратить чтение этой главы и обратиться к дальнейшим. Но кто желает познакомиться еще с несколькими интересными достопримечательностями мира чисел, тех приглашаю осмотреть со мною небольшой ряд ближайших витрин.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

$$100 = \left\{ \begin{array}{l} 24\frac{3}{6}+75\frac{9}{18} \\ 95\frac{3}{7}+4\frac{16}{28} \\ 98\frac{3}{6}+1\frac{27}{54} \\ 94\frac{1}{2}+5\frac{38}{76} \\ 1\frac{6}{7}+3+95\frac{4}{28} \\ 57\frac{3}{6}+42\frac{9}{18} \end{array} \right\} = 100$$

Каждая сумма состоит только из девяти разных цифр.

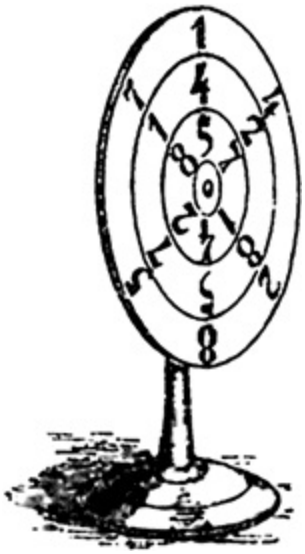
Магические кольца

Задача № 39

Что за странные кольца выставлены в следующей витрине нашей галереи? Перед нами (см. рис. след. стр.) три плоских кольца, вращающихся одно в другом. На каждом кольце написаны шесть цифр в одном и том же порядке, иначе говоря - написано одно и то же число: 142857. Эти кольца обладают следующим удивительным свойством: как бы ни были они повернуты, мы при сложении двух написанных на них чисел - считая от любой цифры в направлении начерченной стрелки - во всех случаях получим то же самое шестизначное число (если только результат вообще будет 6-ти значный), лишь немного подвинутое! В том положении, например, какое изображено на прилагаемом чертеже, мы получаем при сложении двух наружных колец:

$$\begin{array}{r} 142857 \\ +\,428571 \\ \hline 571428. \end{array}$$

т. е. опять-таки тот же ряд цифр: 142857, только цифры 5 и 7 перенеслись из конца в начало.



При другом расположении колец относительно друг друга мы имеем такие случаи:

$$\begin{array}{r} 285714 \\ +\,571428 \\ \hline 857142 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714285 \\ +\,142857 \\ \hline 857142 \end{array} \quad \text{и т. п.}$$

Исключение составляет единственный случай, когда в результате получается 999999.

$$\begin{array}{r} 285714 \\ +\ 714285 \\ \hline 999999 \end{array}.$$

Мало того. Тот же ряд цифр в той же последовательности мы получим и при вычитании чисел, написанных на кольцах. Например:

$$\begin{array}{r} 428571 \\ -\ 142857 \\ \hline 285714 \end{array} \quad \begin{array}{r} 571428 \\ -\ 285714 \\ \hline 285714 \end{array} \quad \begin{array}{r} 714285 \\ -\ 142857 \\ \hline 571428 \end{array}.$$

Исключение составляет случай, когда приведены к совпадению одинаковые цифры - тогда, разумеется, разность равна нулю.

Но и это еще не все. Умножьте число 142857 на 2, на 3, на 4, на 5 или на 6 - и вы получите снова то же число, лишь передвинутое, в круговом порядке, на одну или несколько цифр:

$$142857 \times 2 = 285714$$
$$142857 \times 3 = 428571$$
$$142857 \times 4 = 571428$$
$$142857 \times 5 = 714285$$
$$142857 \times 6 = 857142.$$

Чем же обусловлены все загадочные особенности этого числа?

Решение

$$\frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}.$$

Мы нападаем на путь к разгадке, если продлим немного последнюю табличку и попробуем умножить наше число на 7: в результате получится 999999. Значит, число наше - не что иное, как седьмая часть 999999, а, следовательно, дробь И действительно, если вы станете превращать 1/7 в десятичную дробь, вы получите:

$1 : 7 = 0{,}142857\ldots$, то есть $^1/_7 = 0, (142857)$

10
30
20
60
40
50
1.

Наше загадочное число есть период бесконечной периодической дроби, которая получается при превращении $^1/_7$ в десятичную. Становится понятным теперь, почему при удвоении, утроении и т. д. этого числа происходит лишь перестановка одной группы цифр на другое место. Ведь умножение этого числа на 2 делает его равным $^2/_7$ и, следовательно, равносильно превращению в десятичную дробь уже не $^1/_7$, а $^2/_7$. Начав же превращать дробь $^2/_7$ в десятичную, вы сразу заметите, что цифра 2 - один из тех остатков, которые у нас получались уже при превращении $^1/_7$; ясно, что должен повториться и прежний ряд цифр частного, но он начнется с другой цифры; иными словами, должен получиться тот же период, но только несколько начальных цифр его очутятся на конце. То же самое произойдет и при умножении на 3, на 4, на 5 и на 6, т. е. на все числа, получающиеся в остатках. При умножении же на 7 мы должны получить целую 1-цу, или, - что то же самое - 0,9999…

Любопытные результаты сложения и вычитания чисел на кольцах находят себе объяснение в том же факте, что 142857 есть период дроби, равной $^1/_7$. В самом деле: что мы делаем, поворачивая кольцо на несколько цифр? Переставляем группу цифр спереди на конец, т. е., согласно только что сказанному, мы умножаем число 142857 на 2, на 3, на 4 и т. д. Следовательно, все действия сложения или вычитания чисел, написанных на кольцах, сводятся к сложению или вычитанию дробей $^1/_7$, $^2/_7$, $^3/_7$ и т. д. В результате мы должны получить, конечно, несколько седьмых долей, - т. е. опять-таки наш ряд цифр 142857 в той или иной круговой перестановке. Отсюда надо исключить лишь случаи, когда складываются такие числа седьмых долей, которые в сумме дают 1 или больше 1.

Но и последние случаи исключаются не вполне: они дают результат, правда, не тождественный с рассмотренными, но все же сходный с ними. Рассмотрим внимательнее, что должно получиться от умножения нашего загадочного числа на множитель больше 7, т. е. на 8, на 9 и т. д. Умножить 142857, например, на 8, мы можем так: умножить сначала на 7 и к произведению (т. е. к 999999) прибавить наше число:

142857 x 8 = 142857 x 7 + 142857 = 999999 + 142857 = 1.000.000-1 + 142857 = 1.000.000 + (142857-1).

Окончательный результат - 1142856 - отличается от умножаемого 142857 только тем, что впереди стоит еще одна 1-ца, а последняя цифра на 1-цу же уменьшена. По сходному правилу составляются произведения 142857 на всякое другое число, больше 7, - как легко усмотреть из следующих строк:

142857 x 8 = (142857 x 7) + 142857 = 1142856

142857 x 9 = (142857 x 7) + (142857 x 2) = 1285713

142857 x 10 = (142857 x 7) + (142857 x 3) = 1428570

142857 x 16 = (143857 x 7 x 2) + (142857 x 2) = 2285712

142857 x 39 = (142857 x 7 x 5) + (142857 x 4) = 5571423.

Общее правило здесь такое: при умножении 142857 на любой множитель нужно умножить лишь на остаток от деления множителя на 7; впереди этого произведения ставится число, показывающее, сколько семерок в множителе, и то же число вычитается из результата[67]. Пусть мы желаем умножить 142857 на 86. Множитель 86при делении на 7 дает в частном 12 и в остатке 4. Следовательно, результат умножения таков:

12571428 - 12 = 12571416.

От умножения 142857 x 365 мы получим (так как 365 при делении на 7 дает в частном 52, а в остатке 1):

52142857 - 52 = 52142805.

Усвоив это простое правило и запомнив результаты умножения нашего диковинного числа на множители от 2 до 6 (что весьма нетрудно - нужно помнить лишь, с какой цифры они начинаются), вы можете изумлять непосвященных молниеносно-быстрым умножением шестизначного числа. А чтобы не забыть этого удивительного числа, запомним, что оно произошло от $^1/_7$, или - что то же самое, - от $^2/_{14}$; вот вам первые три цифры нашего числа: 142. Остальные три получаются вычитанием первых трех из 9-ти:

$$\begin{array}{r} 999 \\ -\ 142857 \\ \hline 857. \end{array}$$

Мы уже имели дело с такими числами - именно, когда знакомились со свойствами числа 999. Вспомнив сказанное там, мы сразу сообразим, что число 142857 есть, очевидно, результат умножения 143 на 999:

142857 = 143 x 999.

Но 143 = 13 x 11. Припомнив замеченное раньше о числе 1001, равном 7 x 11 x 13, мы будем в состоянии, не выполняя действия, предсказать, что должно получиться от умножения 142857 x 7:

142857 x 7 = 143 x 999 x 7 = 999 x 11 x 13 x 7 = 999 x 1001 = 999999

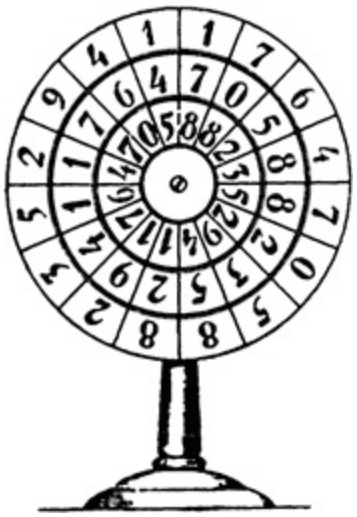
(все эти преобразования мы, конечно, можем проделать в уме).

Феноменальная семья

Задача № 40

Только что рассмотренное нами число 142857 является одним из членов целой семьи чисел, обладающих теми же свойствами. Вот еще одно такое число: 058823594117647 (0 впереди необходим). Если умножить это число, например, на 4, мы получим тот же ряд цифр, только первые 4 цифры будут переставлены в конец:

058823529411764 7x4 = 2352941176470588.



Расположив цифры этого числа на ряде подвижных колец, как в предыдущем случае, - мы при сложении чисел двух колец будем получать то же число, лишь смещенное в круговом порядке:

$$\begin{array}{r} 0588235294117647 \\ +\ 2352941176470588 \\ \hline 2941176470588235. \end{array}$$

При кольцевом расположении все три ряда, конечно, тождественны.

От вычитания чисел двух колец опять-таки получается тот же круг цифр:

$$\begin{array}{r} 2352941176470588 \\ -\ 0588235294117647 \\ \hline 1764705882352941. \end{array}$$

Наконец, это число, как и рассмотренное ранее, состоит из двух половин: цифры второй половины являются дополнением цифр первой половины до 9.

Попробуйте найти разгадку всех этих особенностей.

Решение

Нетрудно догадаться, каким образом приведенный числовой ряд оказался столь близким родственником числа 142857; последнее число представляет собою период бесконечной дроби, равной $^1/_7$, наше же

число является, вероятно, периодом какой-нибудь другой дроби. Так и есть: наш длинный ряд цифр - не что иное, как период бесконечной дроби, получающейся от превращения в десятичную простой дроби $^1/_{17}$:

$^1/_{17}$ = 0,(0588235294117647).

Вот почему при умножении этого числа на множители от 1 до 16 получается тот же ряд цифр, в котором лишь одна или несколько начальных цифр перенесены в конец числа. И наоборот - перенося одну или несколько цифр ряда из начала в конец, мы тем самым увеличиваем это число в несколько раз (от 1 до 16). Складывая два кольца, повернутых одно относительно другого, мы производим сложение двух умноженных чисел, например утроенного и удесятеренного - и, конечно, должны получить то же кольцо цифр, потому что умножение на 3 + 10, т. е. на 13, вызывает лишь перестановку группы цифр, незаметную при круговом расположении.

При некотором положении колец получаются, однако, суммы, немного отличающиеся от первоначального ряда. Если, например, повернем кольца так, чтобы складывать пришлось шестикратное число с пятнадцатикратным, то в сумме должно получиться число, умноженное на 6 + 15 = 21. А такое произведение, как легко догадаться, составляется уже несколько иначе, чем произведение на множитель, меньший 16. В самом деле: так как наше число есть период дроби равной $^1/_{17}$, то, будучи умножено на 17, оно должно дать 16 девяток (т. е. столько, сколько их в подразумеваемом знаменателе периодической дроби), или 1 с 17 нулями минус 1. Поэтому при умножении на 21, т. е. на 4 + 17, мы должны получить четырехкратное число, впереди которого стоит 1, а от разряда единиц отнята 1. Четырехкратное же число начнется с цифр, получающихся при превращении в десятичную дробь простой дроби $^4/_{17}$.

$$\begin{array}{r} 4 \;:\; 17 = 0{,}23\ldots\ldots \\ \hline 40 \\ \hline 60 \\ \hline 9 \end{array}$$

Порядок остальных цифр нам известен: 5294… Значит, 21-кратное наше число будет

2352941176470588.

Столько именно и получается от сложения кругов цифр при

соответственном их расположении. При вычитании числовых колец такого случая, разумеется, быть не может.

Чисел, подобных тем двум, с которыми мы познакомились, существует множество. Все они составляют словно одно семейство, так как объединены общим происхождением - от превращения простых дробей в бесконечные десятичные. Но не всякий период десятичной дроби обладает рассмотренным выше любопытным свойством давать при умножении круговую перестановку цифр. Не вдаваясь в тонкости теории, отметим, что это имеет место только для тех дробей, число цифр периода которых на единицу меньше знаменателя соответствующей простой дроби. Так, например:

$^1/_7$ дает в периоде 6 цифр.
$^1/_{17}$ « « « 16 «
$^1/_{19}$ « « « 18 «
$^1/_{23}$ « « « 22 «
$^1/_{29}$ « « « 28 «

Вы можете убедиться испытанием, что периоды дробей, получающихся от превращения $^1/_{19}$, $^1/_{23}$ и $^1/_{29}$ в десятичные, обладают теми же особенностями, как и рассмотренные нами периоды дробей $^1/_7$ и $^1/_{17}$.

Например, от $^1/_{29}$ получаем число

0344827586206896 551724137931.

Если указанное сейчас условие (относительно числа цифр периода) не соблюдено, то соответствующий период дает число, не принадлежащее к занимающей нас семье интересных чисел. Например, 1 / 13 дает десятичную дробь с шестью (а не с 12) цифрами в периоде:

1 / 13 = 0,076923.

Помножив на 2, получаем совершенно иное число:

2 / 13 = 0,153846.

Почему? Потому что среди остатков от деления 1:13 не было числа 2. Различных остатков было столько, сколько цифр в периоде, т. е. 6; различных же множителей для дроби $^1/_{13}$ у нас 12; следовательно, не все множители будут среди остатков, а только 6. Легко убедиться, что эти множители следующие: 1, 3, 4, 9, 10, 12. Умножение на эти 6 чисел дает круговую перестановку (076923 x 3 = 230769), на остальные - нет. Вот почему от $^1/_{13}$ получается число, лишь отчасти пригодное для

«магического кольца». То же надо сказать и о целом ряде других периодов.

После этого, думаем, нельзя не согласиться, что длиннейшие периоды бесконечных дробей представляют собою настоящую Калифорнию интереснейших арифметических достопримечательностей.

Решение задачи № 28 (стр. 200)

Число 130 в различных системах счисления выражается следующим образом:

в двоичной . .	10000010
« троичной . .	11211
« 4-ной	2002
« 5-ной	1010
« 6-ной	334
« 7-ной	244
« 8-ной	202
« 9-ной	154

Глава VI

Фокусы без обмана

Искусство индусского царя

Арифметические фокусы - честные, добровестные фокусы. Здесь не стремятся обмануть, не стараются усыпить внимание зрителя. Чтобы выполнить арифметический фокус, не нужны ни чудодейственная ловкость рук, ни изумительное проворство движений, ни какие-либо другие артистические способности, требующие иногда многолетних упражнений. Весь секрет арифметического фокуса состоит в использовании любопытных свойств чисел, в близком знакомстве с их особенностями. Кто знает разгадку такого фокуса, тому все представляется простым и ясным; а для незнающего арифметики - самое прозаическое действие, например умножение, кажется уже чем-то вроде фокуса.

Было время, когда выполнение даже обыкновенных арифметических действий над большими числами, знакомых теперь каждому школьнику, составляло искусство лишь немногих и казалось остальным какою-то сверхъестественною способностью. В древнеиндусской повести «Наль и Дамаянти»[68] находим отголосок такого взгляда на арифметические действия. Наль, умевший

превосходно править лошадьми, возил однажды своего хозяина, царя Риτуперна, мимо развесистого дерева - Вибитаки.

Вдруг он увидел вдали Вибитаку - ветвисто-густою Сенью покрытое дерево. «Слушай, - сказал он: - «Здесь на земле никто не имеет всезнанья; в искусстве Править конями ты первый; зато мне далося искусство «Счета»…

И в доказательство своего искусства царь мгновенно сосчитал число листьев на ветвистой Вибитаке. Изумленный Наль просит Ритуперна открыть ему тайну его искусства, и царь соглашается.

…Лишь только Вымолвил слово свое Ритуперн, как у Наля открылись Очи, и он все ветки, плоды и листья Вибитаки Разом мог перечесть…

Секрет искусства состоял, как можно догадаться, в том, что непосредственный счет листьев, требующий много времени и терпения, заменялся счетом листьев одной лишь ветки и умножением этого числа на число веток каждого сука и далее - на число сучьев дерева (предполагая, что сучья одинаково обросли ветками, а ветки - листьями).

Разгадка большинства арифметических фокусов столь же проста, как и секрет «фокуса» царя Ритуперна. Стоит лишь узнать, в чем разгадка фокуса, и вы сразу овладеваете искусством его выполнять, как овладел легендарный Наль изумительным искусством быстрого счета. В основе каждого арифметического фокуса лежит какая-нибудь интересная особенность чисел, и потому знакомство с подобными фокусами не менее поучительно, чем занимательно.

Не вскрывая конвертов

Задача № 41

Фокусник вынимает стопку из 300 кредитных билетов по 1 рублю каждый[69] и предлагает вам разложить деньги в 9 конвертах так, чтобы вы могли уплатить ими любую сумму до 300 рублей, не вскрывая ни одного конверта.

Задача представляется вам совершенно невыполнимой. Вы готовы уже думать, что тут дело кроется в какой-нибудь коварной игре слов или неожиданном толковании их смысла. Но вот фокусник, видя вашу беспомощность, сам раскладывает деньги по конвертам, заклеивает их и предлагает вам назвать любую сумму в пределах трехсот рублей.

Вы называете наугад первое попавшееся число, - например 269.

Без малейшего промедления фокусник подает вам 4 заклеенных конверта. Вы вскрываете их и находите:

в 1-м — 64 руб.
« 2-м — 45 «
« 3-м — 128 «
« 4-м — 32 «
Итого 269 руб.

Теперь вы склонны заподозрить фокусника в искусной подмене конвертов и требуете повторения опыта. Он спокойно кладет деньги обратно в конверты, заклеивает и оставляет их на этот раз в ваших руках. Вы называете новое число, например 100, или 7, или 293 - и

фокусник моментально указывает, какие из лежащих у вас под руками конвертов вы должны взять, чтобы составить требуемую сумму (в первом случае, для 100 р. - 4 конверта, во втором, для 7 р. - 3 конверта, в третьем, для 293 р. - 6конвертов).

В чем же дело?

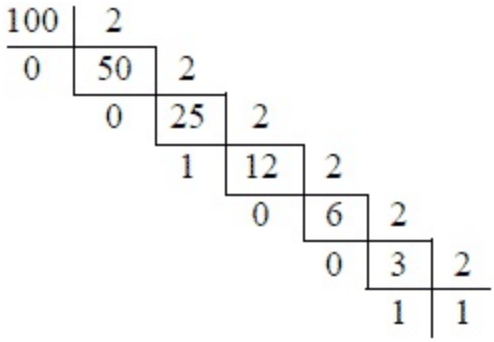
Решение

Секрет этот кроется в том, чтобы разложить деньги в следующие стопки: 1 р., 2 р., 4 р., 8р., 16 р., 32 р., 64 р., 128 р. и, наконец, в последней - остальные рубли, т. е.

300 - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) = 300 - 255 = 45.

Из первых 8конвертов возможно, как нетрудно убедиться, составить любую сумму от 1 до 255; если же задается число большее, то пускают в дело последний конверт, с 45 рублями, а разницу составляют из первых 8-ми конвертов.

Вы можете проверить пригодность такой группировки чисел многочисленными пробами и убедиться, что из них можно действительно составить всякое число, не превышающее 300. Но вас, вероятно, интересует и то, почему собственно ряд чисел 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и т. д. обладает столь замечательным свойством. Это нетрудно понять, если вспомнить, что числа нашего ряда представляют степени 2-х: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 и т. д.[70], и следовательно, их можно рассматривать как разряды двоичной системы счисления. А так как всякое число можно написать по двоичной системе, то значит и всякое число возможно составить из суммы степеней 2-х, т. е. из чисел ряда 1, 2, 4, 8, 16 и т. д. И когда вы подбираете конверты, чтобы составить из их содержимого заданное число, вы в сущности выражаете заданное число в двоичной системе счисления. Например, число 100 мы легко сможем составить, если изобразим его в двоичной системе:



100 = 1 1 0 0 1 0 0
64 32 (16) (8) 4 (2) (1),
100 = 64+ 32 + 4.

Напомним, что в двоичной системе на первом месте справа стоят единицы, на втором - двойки, на третьем - четверки, на четвертом - восьмерки и т. д.

Угадать число спичек

Задача № 42

Свойством двоичной системы можно воспользоваться и для следующего фокуса. Вы предлагаете кому-нибудь взять неполный коробок со спичками, положить его на стол, а рядом положить 8бумажных квадратиков. Затем просите в вашем отсутствии проделать следующее: оставив половину спичек в коробке, перенести другую половину на ближайшую бумажку; если число спичек нечетное, то излишнюю спичку положить рядом с бумажкой, налево от нее. Спички, очутившиеся на бумажке, надо (не трогая лежащей рядом) разделить на две равные части: одну половину положить в коробку, другую - переложить на следующую бумажку; в случае нечетного числа остающуюся спичку положить рядом со второй бумажкой. Далее поступать таким же образом, возвращая всякий раз половину спичек обратно в коробку, а другую половину - перекладывая на следующую

бумажку, не забывая, при нечетном числе спичек, класть одну спичку рядом. В конце концов все спички, кроме одиночных, лежащих рядом с бумажками, возвратятся в коробку.

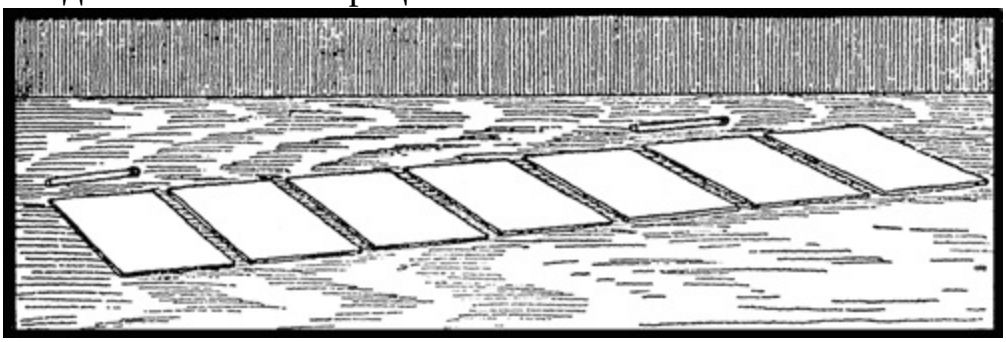
Когда это сделано, вы являетесь в комнату и, бросив взгляд на пустые бумажки, называете число спичек во взятой коробке.

Как можно по пустым бумажкам и случайным единичным спичкам догадаться о первоначальном числе спичек в коробке?

Решение

Эти «пустые» бумажки в данном случае очень красноречивы: по ним и по одиночным спичкам можно буквально прочесть искомое число, потому что оно написано на столе - в двоичной системе счисления. Поясним это на примере. Пусть число спичек было 66. Последовательные операции с ними и окончательный вид бумажек показаны на следующих схемах:

Последовательные операции.



Окончательный вид.

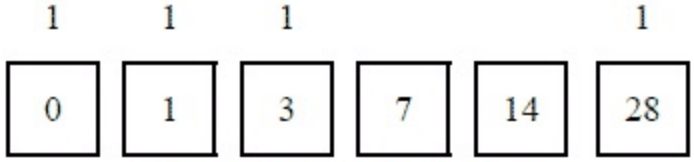
Не нужно большой проницательности, чтобы сообразить, что проделанные со спичками операции в сущности те же самые, какие мы

выполнили бы, если бы хотели выразить число спичек в коробке по двоичной системе счисления; окончательная же схема - прямо изображает это число в двоичной системе, если пустые бумажки принять за нули, а бумажки, отмеченные сбоку спичкой, - за единицы. Читая схему слева направо получаем

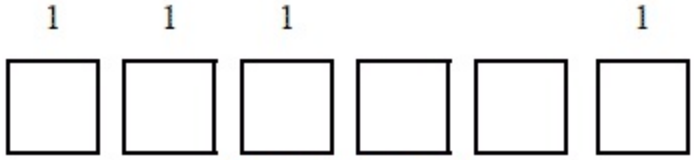
1 0 0 0 0 1 0
64(32)(16)(8)(4) 2 (1),

то есть в десятичной системе: 64 + 2 = 66.

Если бы было 57 спичек, мы имели бы иные схемы:



Последовательные операции.



Окончательный вид.

Искомое число, написанное по двоичной системе:

1 1 1 0 0 1
32 16 8 (4) (2) 1.

А в десятичной: 32 + 16 + 8 + 1 = 57.

Чтение мыслей по спичкам

Задача № 43

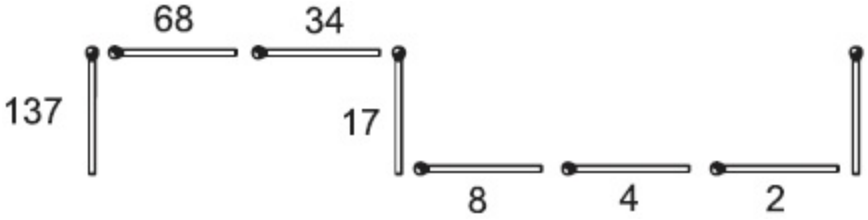
Третье видоизменение того же фокуса представляет собою своеобразный способ отгадывания задуманного числа по спичкам.

Загадавший должен мысленно делить задуманное число пополам, полученную половину опять пополам и т. д. (от нечетного числа, отбрасывая единицу) - и при каждом делении класть перед собою спичку, направленную вдоль стола, если делится число четное, и поперек, если приходится делить нечетное. К концу операции получается фигура вроде следующей:

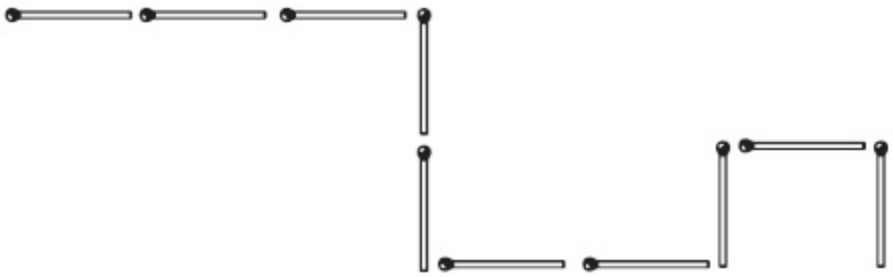
Вы всматриваетесь в эту фигуру и безошибочно называете задуманное число: 137. Как вы узнаете его?

Решение

Способ станет ясен сам собою, если в выбранном примере (137) мы последовательно обозначим возле каждой спички то число, при делении которого она была положена:



Теперь понятно, что так как последняя спичка во всех случаях обозначает число 1, то не составляет труда, восходя от нее к предшествующим делениям, добраться до первоначально задуманного числа. Например, по фигуре вы можете вычислить, что задумано было число 664. В самом деле, выполняя последовательно удвоения (начиная с конца) и не забывая прибавлять, где надо, единицу, получаем (см. рис.):



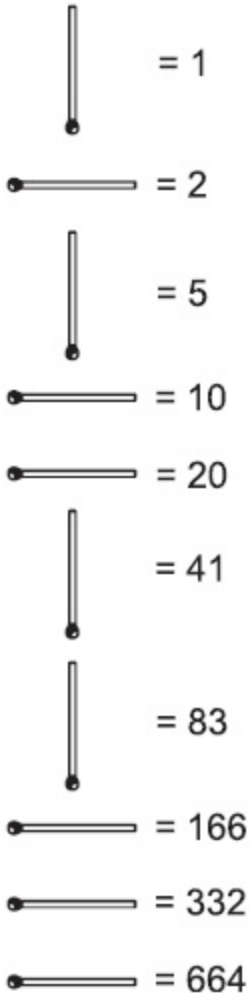
Таким образом, пользуясь спичками, вы прослеживаете ход чужих мыслей, восстановляя всю цепь умозаключений.

Тот же результат мы можем получить иначе, сообразив, что лежащая спичка должна соответствовать в двоичной системе нулю (деление на 2без остатка), а стоящая - единице. Таким образом, в первом примере мы имеем (читая справа налево) число

1	0	0	0	1	0	0	1
128	(64)	(32)	(16)	8	(4)	(2)	1

или в десятичной системе:

128 + 8 + 1 = 137.



А во втором примере задуманное число изображается по двоичной системе:

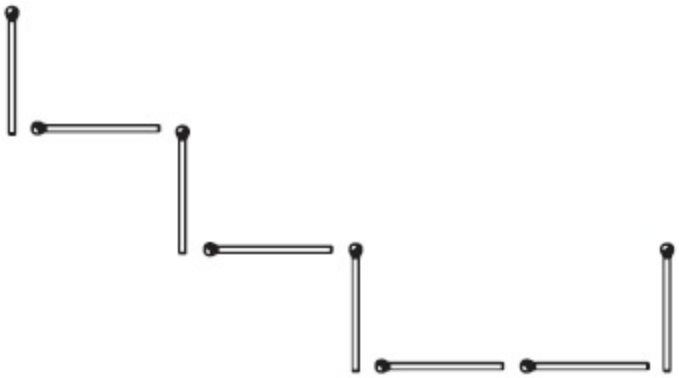
1 0 1 0 0 1 1 0 0 0
512 (256) 128 (64) (32) 16 8 (4) (2) 1

или по десятичной системе:

512 + 128 + 16 + 8 = 664.

Задача № 44

Какое число задумано, если получилась такая фигура (см. прилож. рис).



Решение

Число «10010101» в двоичной системе соответствует в десятичной:
128 + 16 + 4 + 1 = 149.

(Необходимо заметить, что получаемая при последнем делении 1-ца также должна быть отмечаема стоящей спичкой.)

Идеальный разновес

Задача № 45

У некоторых читателей, вероятно, возник уже вопрос, почему для выполнения описанных раньше опытов мы пользуемся именно двоичной системой? Ведь всякое число можно изобразить в любой системе, между прочим и в десятичной. Чем же объясняется предпочтение здесь двоичной?

Решение

Объясняется оно тем, что в этой системе, кроме нуля, употребляется всего одна цифра - единица, а следовательно, число составляется из различных степеней 2-х, взятых только по одному разу. Если бы в фокусе с конвертами мы распределили деньги, например, по 5-ричной системе, то могли бы составить, не вскрывая конвертов, любую сумму лишь в том случае, когда каждый пакет повторяется у нас не менее 4-х раз (в 5-ричной системе употребляются ведь кроме нуля 4 цифры).

Впрочем, бывают случаи, когда для подобных надобностей удобнее пользоваться не двоичной, а троичной системой, несколько видоизмененной. Сюда относится знаменитая старинная «задача о наборе гирь», которая может послужить сюжетом и для арифметического фокуса.

Задача № 46а

Представьте, что вам предложили придумать набор из 4 гирь, с помощью которых возможно было бы отвесить любое целое число килограммов, от 1 до 40. Двоичная система подсказывает вам набор:

1 кг, 2 кг, 4 кг, 8 кг, 16 кг,

которым можно отвешивать все грузы от 1 до 31 кг. Но это, очевидно, не удовлетворяет требуемым условиям ни по числу гирь, ни по предельному грузу (31 кг вместо 40). С другой стороны, вы не использовали здесь возможности класть гири не только на одну чашку весов, но и на две, т. е. обходиться не только суммою гирь, но и их разностью. Это дает так много разнообразных комбинаций, что вы совершенно теряетесь в поисках, не умея уложить их в какую-либо систему. Если вам не посчастливится напасть на правильный путь, вы готовы будете даже сомневаться вообще в разрешимости подобной задачи столь малым числом гирь, как четыре.

Решение

Посвященный выходит из этого затруднения с волшебной простотой, намечая следующие 4 гири:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг.

Любое целое число килограммов, до 40 кг, вы можете отвесить такими гирями, кладя их то на одну, то на обе чашки весов. Не приводим примеров, потому что каждый легко может сам убедиться в полной пригодности такого набора гирь для нашей цели. Остановимся лучше на том, почему именно указанный ряд обладает этим свойством. Вероятно, читатели уже заметили, что числа эти - ряд степеней числа 3[71]:

3^0, 3^1, 3^2, 3^3.

Это значит, что мы обращаемся здесь к услугам троичной системы счисления. Гири - цифры этой системы. Но как воспользоваться ею в тех случаях, когда требуемый вес получается в виде разности двух гирь? И как избегнуть необходимости обращаться к удвоению гирь (в троичной системе ведь кроме нуля употребляются две цифры: 1 и 2)?

$$1\bar{1}1$$
$$11$$

То и другое достигается введением «отрицательных» цифр. Дело сводится попросту к тому, что вместо цифры 2 употребляют 3-1, т. е. цифру единицы высшего разряда, от которого отнимается одна единица низшего. Например, число 2 в нашей видоизмененной троичной системе обозначится не 2, а, где знак минус над цифрой единиц означает, что эта 1-ца не прибавляется, а отнимается. Точно так же число 5 изобразится не 12, а (т. е. 9-3-1 = 5).

Теперь ясно, что если любое число можно изобразить в троичной системе с помощью нуля (т. е. знака отсутствия числа) и одной только цифры, именно прибавляемой или отнимаемой единицы, - то из чисел 1, 3, 9, 27 можно, складывая или вычитая их, составить все числа от 1 до 40. Мы как бы пишем все эти числа, употребляя вместо цифр - гири. Случай сложения отвечает при взвешивании тому случаю, когда гири помещаются все на одну чашку, а случай вычитания, - когда часть гирь кладется на чашку с товаром и, следовательно, вес ее отнимается от веса остальных гирь. Нуль соответствует отсутствию гири.

Задача № 46б

Как известно, эта система на практике не применяется. Всюду в мире, где введена метрическая система мер, применяется набор в 1, 2, 2, 5 единиц, а не 1, 3, 9, 27, - хотя первым можно отвешивать грузы только до 10 единиц, а вторым - до 40. Не применялся набор 1, 3, 9, 27 и тогда, когда метрическая система еще не была введена. В чем же причина отказа на практике от этого, казалось бы, совершеннейшего разновеса?

Решение

Причина кроется в том, что идеальный разновес удо - бен только на бумаге, на деле же пользоваться им весьма хлопотливо. Если бы приходилось только отвешивать заданное число весовых единиц, - например, отвесить 400 граммов масла или 2500 граммов сахара, - то системой гирь в 100, 300, 900, 2700 можно было бы еще на практике пользоваться (хотя и тут приходилось бы каждый раз долго подыскивать соответствующую комбинацию). Но когда приходится определять, сколько весит данный товар, то подобный разновес оказывается страшно неудобным: здесь нередко, ради прибавления к поставленным гирям одной единицы, приходится производить полную замену прежней комбинации другой, новой. Отвешивание становится при таких условиях крайне медленным и притом утомительным делом. Не всякий быстро сообразит, что, например, вес 19 кг получится, если на одну чашку поставить гири в 27 кг и 1 кг, а на другую 9; вес 20 кг - если на одну чашку поставить гири в 27 кг и 3 кг, а на другую - 9 кг и 1 кг. При каждом отвешивании приходилось бы решать подобные головоломки. Разновес 1, 2, 2, 5 таких затруднений не доставляет.

Предсказать сумму ненаписанных чисел

Задача № 47

Одним из наиболее поражающих «номеров», выполняемых феноменальным русским вычислителем Р С. Арраго, является молниеносное - с одного взгляда - складывание целого столбца многозначных чисел.

Но что сказать о человеке, который может написать сумму еще раньше, чем ему названы все слагаемые?

Это, конечно, фокус, и выполняется он в таком виде. Отгадчик предлагает вам написать какое-нибудь многозначное число, по вашему выбору. Бросив взгляд на это первое слагаемое, отгадчик пишет на бумажке сумму всей будущей колонны слагаемых и передает вам на хранение. После этого он просит вас (или кого-нибудь из присутствующих) написать еще одно слагаемое, - опять-таки какое угодно. А затем быстро пишет сам третье слагаемое. Вы складываете все три написанных числа - и получаете как раз тот результат, который заранее был написан отгадчиком на спрятанной у вас бумажке.

Если, например, вы написали в первый раз 83267, то отгадчик пишет будущую сумму 183266. Затем вы пишете допустим, 27935, а отгадчик приписывает третье слагаемое - 72064:

I.....Вы: 83267
III.....Вы: 27935
IV....Отгадчик: 72064
II.....Сумма: 183266.

Получается в точности предсказанная сумма, хотя отгадчик не мог знать, каково будет второе слагаемое. Отгадчик может предсказать также сумму 5-ти или 7-ми слагаемых, - но тогда он сам пишет два или три из них. Никакой подмены бумажки с результатом здесь заподозрить вы не можете, так как она до последнего момента хранится в вашем собственном кармане. Очевидно, отгадчик пользуется здесь каким-то неизвестным вам свойством чисел. Каким?

Решение

Отгадчик пользуется тем, что от прибавления, скажем, к 5-значному числу числа из 5-ти девяток (99999) это число увеличивается на 100000-1, т. е. впереди него появляется единица, а последняя цифра уменьшается на единицу. Например:

$$\begin{array}{r} 83267 \\ +\ 99999 \\ \hline 183266. \end{array}$$

Эту сумму - т. е. сумму написанного вами числа и 99999 - отгадчик и пишет на бумажке, как будущий результат сложения. А чтобы результат оправдался, он, увидев ваше второе слагаемое, выбирает свое, третье слагаемое так, чтобы вместе со вторым оно составило 99999, т. е. вычитает каждую цифру второго слагаемого из 9. Эти операции вы легко можете теперь проследить на предыдущем примере, - а также и на следующих примерах.

I.....Вы: 379264	I.....Вы: 9935
III.....Вы: 4873	III.....Вы: 5669
IV....Отгадчик: 995126	IV...Отгадчик: 4330
II.....Сумма: 1379263	II.....Сумма: 19934.

Легко усмотреть, что вы сильно затрудните отгадчика, если ваше второе слагаемое будет заключать больше цифр, чем первое: отгадчик не сможет написать слагаемого, которое уменьшит ваше второе число для оправдания предсказанного им слишком малого результата. Поэтому опытный отгадчик предупредительно ограничивает свободу вашего выбора этим условием.

Фокус выходит внушительнее, когда в придумывании слагаемых участвует несколько лиц. После первого же слагаемого - например 437692, - отгадчик уже предсказывает сумму всех пяти чисел, именно записывает 2437690 (здесь будет добавлено дважды 999999, т. е. 2000000-2). Дальнейшее ясно из схемы:

I.....Вы написали: 437692
III.....Другой написал: 822541
V.....Третий написал: 263009
IV....Отгадчик добавил: 177458
VI. « « 736990
II. « предсказал: 2437690.

Предугадать результат

Большое впечатление производят те арифметические фокусы, в которых отгадчик угадывает результат действий над совершенно неизвестными ему числами. Подобных фокусов существует много, и все они основаны на возможности придумать такой ряд арифметических действий, результат которых нисколько не зависит от чисел, над которыми они производятся.

Рассмотрим фокусы этого рода.

Признак делимости на 9 всем известен: число кратно 9, если сумма его цифр кратна 9. Припомнив, как выводится это правило, мы запасаемся еще и другим интересным правилом: если от числа отнять сумму его цифр, то получается остаток, кратный 9 (это доказывается попутно при выводе признака делимости на 9). Точно так же мы получим число, кратное 9, если отнимем от данного числа другое, которое составлено из тех же цифр, но размещенных в другом порядке. Например: 457-(4 + 5 + 7) = 441, т. е. числу, кратному 9; или: 7843-4738 = 3105, числу, кратному 9[72]. Всем этим можно воспользоваться для выполнения несложного фокуса.

Задача № 48

Предложите товарищу задумать любое число и затем, переставив его цифры в ином, каком угодно, порядке, вычесть меньшее число из большего. В полученном результате ваш товарищ зачеркивает одну

цифру - безразлично какую - и читает вслух оставшиеся цифры, а вы сразу же называете скрытую от вас, зачеркнутую сумму. Как вы отгадываете ее?

Решение

Очень просто: вы знаете, что результат должен быть кратен 9, т. е. сумма его цифр должна без остатка делиться на 9. Быстро сложив в уме прочитанные вам цифры, вы легко можете сообразить, какой цифры не хватает, чтобы сумма была кратна 9. Например: задумано число 57924; после перестановки получено 92457. Вычитание дает результат 3?533, в котором знак вопроса стоит на месте зачеркнутой цифры. Сложив цифры 3 + 5 + 3 + 3, получаем 14. Нетрудно сообразить, что зачеркнута была цифра 4, потому что ближайшее большее число, кратное 9, есть 18, а 18-4 = 14.

$$\begin{array}{r} 92457 \\ 57924 \\ \hline 3?533 \end{array}$$

Задача № 49

Тот же фокус можно обставить гораздо более эффектно, именно так, чтобы отгадать число, ничего не спрашивая у загадчика. Для этого проще всего предложить задумать трехзначное число с неодинаковыми крайними цифрами; затем, переставив цифры в обратном порядке, вычесть меньшее число из большего; в полученном результате переставить цифры и сложить оба числа. Окончательный результат всего этого ряда перестановок, вычитания и сложения вы называете изумленному загадчику без малейшего промедления или даже вручаете ему заранее в заклеенном конверте. Как это делается?

Решение

Секрет фокуса прост: какое бы число ни было задумано, в результате перечисленных действий всегда получается одно и то же: 1089. Вот несколько примеров:

762	431	982	291
− 267	− 134	− 289	− 192
495	297	693	099
+ 594	+ 792	+ 396	+ 990
1089	1089	1089	1089 .

(Последний пример показывает, как должен поступать загадчик, когда разность получается двузначная.)

Всматриваясь внимательно в ход выкладок, вы, без сомнения, поймете причину такого однообразия результатов. При вычитании неизбежно должна получаться в разряде десятков цифра 9, а по сторонам ее - цифры, сумма которых = 9. При последующем сложении должна поэтому получиться на первом справа месте цифра 9, далее, от 9 + 9, цифра 8и 1-ца в уме, которая при сложении с 9-ю сотнями дает 10. Отсюда - 1089.

Если вы станете повторять этот фокус несколько раз кряду, не внося в него никаких изменений, то секрет ваш, разумеется, будет раскрыт: загадчик сообразит, что постоянно получается одно и то же число 1089, хотя, быть может, и не отдаст себе отчета в причине такого постоянства. Вам необходимо поэтому видоизменять фокус. Сделать это не трудно, так как 1089 = 33 x 33 = 11 x 11 x 3 x 3 = 121 x 9 = 99 x 11. Достаточно поэтому просить загадчика, когда вы доведете его до числа 1089, разделить этот результат на 33, или на 11, или на 121, или на 99, или на 9, - и тогда лишь назвать получающееся число. У вас, следовательно, в запасе имеется 5 изменений фокуса, - не говоря уже о том, что вы можете просить загадчика также умножить сумму на любое число, мысленно выполняя то же самое действие.

Мгновенное деление

Из многочисленных разновидностей фокусов этого рода опишем один, основанный на знакомом уже нам свойстве множителя, состоящего из ряда одних девяток; когда умножают на него число со столькими же цифрами, получается результат, состоящий из двух половин: первая - это умножаемое число, уменьшенное на 1-цу; вторая - результат вычитания первой половины из множителя. Например: 247 x 999 = 246753; 1372 x 9999 = 13718628 и т. п. Причину легко усмотреть из следующей строки:

247 x 999 = 247 x (1000-1) = 247000-247 = 246999-246.

Пользуясь этим, вы предлагаете целой группе товарищей произвести деление многозначных чисел - одному 68933106:6894, другому 8765112348:99999, третьему 543456:544, четвертому 12948705:1295 и т. д., - а сами беретесь обогнать их всех, выполняя те же задачи. И прежде, чем они успеют приняться за дело, вы уже вручаете каждому бумажку с полученным вами безошибочным результатом деления: первому - 9999, второму 87652, третьему - 999, четвертому - 9999.

Вы можете сами придумать по указанному образцу ряд других способов поражать непосвященных мгновенным выполнением деления: для этого воспользуйтесь некоторыми свойствами тех чисел, которые помещены в «Галерее числовых диковинок» (см. главу VI).

Любимая цифра

Задача № 50

Попросите кого-нибудь сообщить вам его любимую цифру. Допустим, вам назвали цифру 6.

- Вот удивительно! - восклицаете вы. - Да ведь это как раз самая замечательная из всех значащих цифр.

- Чем же она замечательна? - осведомляется ваш озадаченный собеседник.

- А вот посмотрите: умножьте вашу любимую цифру на число значащих цифр, т. е. на 9, и полученное число (54) подпишите множителем под числом 12345679:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times\ 54. \\ \hline \end{array}$$

Что получится в произведении?

Ваш собеседник выполняет умножение - и с изумлением получает результат, состоящий сплошь из его любимых цифр:

666666666.

- Вот видите, какой у вас тонкий арифметический вкус, - заканчиваете вы. - Вы сумели избрать из всех цифр как раз ту, которая обладает столь удивительным свойством!

Однако в чем тут дело?

Решение

Точно такой же изысканный вкус оказался бы у вашего собеседника, если бы он избрал какую-нибудь другую из 9-ти значащих цифр, потому что каждая из них обладает тем же свойством:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times 4\ \times 9 \\ \hline 444444444 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times 7\ \times 9 \\ \hline 777777777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times 9\ \times 9 \\ \hline 999999999. \end{array}$$

Почему это так, вы сообразите, если припомните то, что говорилось о числе 12345679 в «Галерее числовых диковинок».

Угадать день рождения

Фокусы, относящиеся к этой категории, могут быть изменяемы на разные лады. Опишу один из видов этого фокуса, довольно сложный, но

именно потому и производящий эффектное впечатление.

Задача № 51

Допустим, что вы родились 18 мая 1903 года и что вам теперь 23 полных года. Но я не знаю ни даты вашего рождения, ни вашего возраста. Тем не менее я берусь отгадать то и другое, заставив вас проделать лишь некоторый ряд вычислений.

А именно: порядковый номер месяца (май, 5-й месяц) я прошу вас умножить на 100, прибавить к произведению число месяца (18), сумму удвоить, к результату прибавить 8, полученное число умножить на 5, к произведению прибавить 4, помножить результат на 10, прибавить 4 и к полученному числу прибавить ваш возраст (23).

Когда вы все это проделаете, вы сообщаете мне окончательный результат вычислений. Я вычитаю из него 444, а разность разбиваю на грани, справа налево, по 2 цифры в каждой: получаю сразу как день и месяц вашего рождения, так и ваш возраст.

Действительно. Проделаем последовательно все указанные вычисления:

$$
\begin{aligned}
5 \times 100 &= 500 \\
500 + 18 &= 518 \\
518 \times 2 &= 1036 \\
1036 + 8 &= 1044 \\
1044 \times 5 &= 5220 \\
5220 + 4 &= 5224 \\
5224 \times 10 &= 52240 \\
52240 + 4 &= 52244 \\
52244 + 23 &= 52267.
\end{aligned}
$$

Произведя вычитание 52267-444, получаем число 51823.

Теперь разобьем это число на грани, справа налево, по две цифры в каждой. Имеем:

5-18-23,

т. е. 5-го месяца (мая), числа 18; возраст 23 года.

Почему же так получилось?

Решение

Секрет нашего фокуса легко понять из рассмотрения следующего равенства:

$$\{[(100m+t)\times 2+8]\times 5+4\}\times 10+4+n-444 = 10000m+100t+n.$$

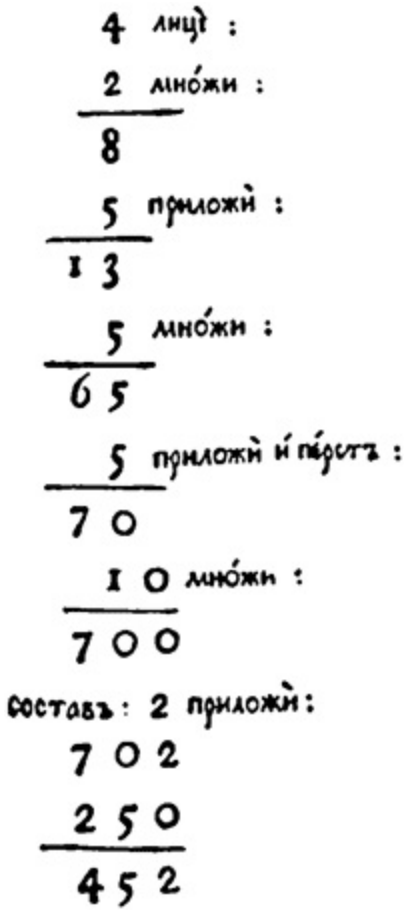
Здесь буква m обозначает порядковый номер месяца, t - число месяца, n - возраст. Левая часть равенства выражает все последовательно произведенные вами действия, а правая - то, что должно получиться, если раскрыть скобки и проделать возможные упрощения. В выражении 10000m + 100t + n ни m, ни t, ни n не могут быть более чем двузначными числами; поэтому число, получающееся в результате, всегда должно при делении на грани, по две цифры в каждой, распасться на три части, выраженные искомыми числами m, t и n.

Предоставляем изобретательности читателя придумать видоизменения этого фокуса, т. е. другие комбинации действий, дающие подобный же результат.

Одно из «утешных действий» Магницкого

Задача № 52

Читателю же предлагаю раскрыть также секрет следующего незамысловатого фокуса, который описан еще в «Арифметике» Магницкого, в главе: «Об утешных некиих действиях через арифметику употребляемых».



Пусть кто-либо задумает какое-нибудь число, относящееся к деньгам, к дням, к часам или к «каковой-либо иной числимой вещи». Остановимся на примере перстня, надетого на 2-й сустав мизинца (т. е. 5-го пальца) 4-го из 8 человек. Когда в это общество является отгадчик, его спрашивают: у кого из восьми человек (обозначенных номерами от 1 до 8) на каком пальце и на котором суставе находится перстень?

«Он же рече: кто-либо от вас умножи оного, который взял через 2, и к тому приложи 5, потом паки (снова) умножи чрез 5, также приложи перст на нем же есть перстень (т. е. к полученному прибавь номер пальца с перстнем). А потом умножи чрез 10, и приложи сустав на нем же перстень взложен, и от сих произведенное число скажи ми, по немуже искомое получиши.

Они же твориша (поступили) якоже повеле им, умножаху четвертого человека, который взял перстень, и прочая вся, яже велеше им; якоже явлено есть (см. выкладки на стр. 255); из всего собрания пришло ему число 702, из него же он вычитал 250, осталось 452, т. е. 4-й человек, 5-й палец, 2-й сустав».

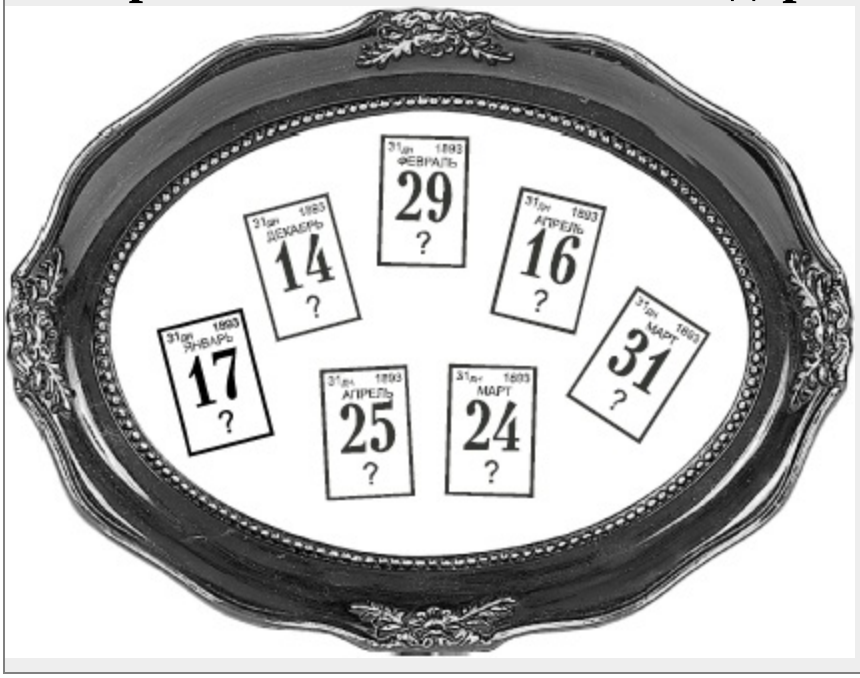
Не надо удивляться, что этот арифметический фокус был известен еще 200 лет назад: задачи совершенно подобного же рода я нашел в одном из первых сборников математических развлечений, именно у Баше-де-Мезирьяка, в его книге «Занимательные и приятные числовые задачи», вышедшей в 1612 г.; а туда она попала из сочинения Леонарда Пизано (1202 г.). Нужно вообще заметить, что большая часть математических игр, головоломок и развлечений, которые в ходу в настоящее время, очень древнего происхождения.

Решение задачи №29 (стр. 200)

По 4-ной системе — 27; по 5-ной — 38; по 6-ной — 51; по 7-ной — 66; по 8-ной — 83; по 9-ной — 102. — Число это не может быть написано ни по двоичной, ни по троичной системе, так как содержит цифру 3, которой в этих системах нет. — Число это по 5-ной системе делится на 2, так как сумма его цифр делится на 2. — По 7-ной системе оно делится на 6, а по 9-ной не делится на 4.

Глава VII

Быстрый счет и вечный календарь



Действительные и мнимые феномены

Кому приходилось присутствовать на сеансах нашего русского вычислителя Арраго, тот, без сомнения, не мог не поразиться его изумительными счетными способностями. Тут уж перед нами не фокус, а редкое природное дарование. Не существует «трюков» для выполнения в уме таких выкладок, как возвышение в куб любого четырехзначного числа или умножение любого шестизначного числа на шестизначное. Куб числа 4729, например, Арраго вычислил при мне в уме менее чем в одну минуту (результат 105756712489), а на умножение 679321x887064, также в уме, употребил всего 1 $^{1}/_{2}$ минуты (результат 602601203544).

Я имел возможность наблюдать вычислительную работу этого феноменального счетчика не только на эстраде, но и в домашней обстановке, с глазу на глаз, и мог убедиться, что никакими особыми

вычислительными приемами он не пользуется, а вычисляет в уме в общем так же, как мы на бумаге. Но его необычайная память на числа помогает ему обходиться без записи промежуточных результатов, а быстрая сообразительность позволяет оперировать с двузначными числами с такою же легкостью, с какою мы производим действия над числами однозначными. Благодаря этому умножение шестизначного числа на шестизначное является для него задачей не большей, примерно, трудности, чем для нас - умножение трехзначного на трехзначное.

Такие феномены, как Арраго или - на Западе - Иноди, Диаманди, Рюкле, встречаются единицами. Но наряду с ними подвизаются и эстрадные математики иного рода, основывающие свое искусство на тех или иных арифметических трюках. Вам, быть может, приходилось слышать или даже присутствовать самим на сеансах «гениальных математиков», вычислявших в уме с поразительной быстротой, сколько вам недель, дней, минут, секунд, в какой день недели вы родились, какой день будет такого-то числа такого-то года, и т. п. Чтобы выполнить большую часть этих вычислений, вовсе не нужно, однако, обладать необычайными математическими способностями. То же самое может после недолгого упражнения проделать и каждый из нас. Нужно только знать кое-какие секреты этих фокусов, - разоблачением которых мы сейчас и займемся.

«Сколько мне недель?»

Чтобы научиться по числу лет быстро определять число заключающихся в них недель, нужно только уметь ускоренно множить на 52, т. е. на число недель в году.

Задача № 53

Пусть дано перемножить 36 х 52. «Счетчик» сразу же, без заминки, говорит вам результат: 1872. Как он его получил?

Решение

Довольно просто: 52 состоит из 50 и 2; 36 умножается на 5 через деление пополам; получается 18 - это две первые цифры результата; далее умножение 36 на 2 делается как обыкновенно; получают 72, которые и приписываются к прежним 18-ти: 1872.

Легко видеть, почему это так. Умножить на 52 - значит умножить на 50 и на 2; но вместо того, чтобы умножить на 50, можно половину умножить на 100 - отсюда понятно деление пополам; умножение же на 100достигается припиской 72-х (36 х 2), отчего каждая цифра увеличивается в 100раз (передвигается на два разряда влево).

Теперь понятно, почему «гениальный» счетчик так быстро отвечает на вопрос «мне столько-то лет; сколько мне недель?». Умножив число лет на 52, ему остается только прибавить еще к произведению седьмую часть числа лет, потому что в году 365 дней, т. е. 52 недели и 1 день: каждые 7 лет из этих избыточных дней накопляется лишняя неделя[73].

«Сколько мне дней?»

Если спрашивают не о числе недель, а о числе дней, то прибегают к такому приему: половину числа лет множат на 73 и приписывают нуль - результат и будет искомым числом. Эта формула станет понятна, если заметить, что 730 = 365 х 2. Если мне 24 года, то число дней получим, умножив 12 х 73 = 876 и приписав нуль - 8760. Самое умножение на 73 также производится сокращенным образом, о чем речь впереди (стр. 261).

Поправка в несколько дней, происходящая от високосных лет, обыкновенно в расчет не принимается, хотя ее легко ввести, прибавив к

результату четверть числа лет, - в нашем примере 24:4 = 6; общий результат, следовательно, 8766[74].

Прием для вычисления числа минут читатель, после сказанного в следующей статье, не затруднится найти самостоятельно.

«Сколько мне секунд?»

Задача № 54

На этот вопрос также можно довольно быстро ответить, пользуясь следующим приемом: половину числа лет умножают на 63; затем ту же половину множат на 72, результат ставят рядом с первым и приписывают три нуля. Если, например, число лет 24, то для определения числа секунд поступают так:

63 x 12 = 756; 72 x 12 = 864; результат 756.864.000.

Как и в предыдущем примере, здесь не приняты в расчет високосные годы - ошибка, которой никто не поставит вычислителю в упрек, когда приходится иметь дело с сотнями миллионов.

На чем же основан указанный здесь прием?

Решение

Правильность нашей формулы выясняется очень просто. Чтобы определить число секунд, заключающихся в данном числе лет, нужно лета (в нашем примере 24) умножить на число секунд в году, т. е. на 365 x 24 x 60 x 60 = 31536000. Мы делаем то же самое, но только большой множитель 31536 разбиваем на две части (приписка нулей сама собой понятна). Вместо того, чтобы умножать 24 x 31536, умножают 24 на

31500 и на 36, но и эти действия мы для удобства вычислений заменяем другими, как видно из следующей схемы:

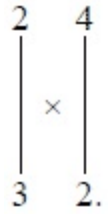
$$24\times31536 = \begin{cases} 24\times31500 = 12\times63000 = 756000 \\ 24\times\quad 36 = 12\times\quad 72 = \quad 864 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 756864. \end{cases}$$

Остается лишь приписать три нуля - и мы имеем искомый результат: 756.864.000.

Приемы ускоренного умножения

Мы упоминали раньше, что для выполнения тех отдельных действий умножения, на которые распадается каждый из указанных выше приемов, существуют также удобные способы. Некоторые из них весьма несложны и удобоприменимы; они настолько облегчают вычисления, что мы советуем читателю вообще запомнить их, чтобы пользоваться при обычных расчетах. Таков, например, прием перекрестного умножения, весьма удобный при действии с двузначными числами. Способ этот не нов; он восходит к грекам и индусам и в старину назывался «способом молнии», или «умножением крестиком». Теперь он хорошо забыт, и о нем не мешает напомнить[75].

Пусть дано перемножить 24 x 32. Мысленно располагаем числа по следующей схеме, одно под другим:



Теперь последовательно производим следующие действия:

1) 4 x 2 = 8- это последняя цифра результата.

2) 2 x 2 = 4; 4 x 3 = 12; 4 + 12 = 16; 6- предпоследняя цифра результата; 1 запоминаем.

3) 2 x 3 = 6, да еще удержанная в уме 1-ца, имеем 7 - это первая цифра результата.

Получаем все цифры произведения: 7, 6, 8 - 768. После непродолжительного упражнения прием этот усваивается очень легко.

Другой способ, состоящий в употреблении так называемых «дополнений», удобно применяется в тех случаях, когда перемножаемые числа близки к 100.

Предположим, что требуется перемножить 92 х 96. «Дополнение» для 92 до 100 будет 8; для 96-ти - 4. Действие производят по следующей схеме:

множители: 92 и 96

дополнения: 8 и 4.

Первые две цифры результата получаются простым вычитанием из множителя «дополнения» множимого или наоборот; т. е. из 92-х вычитают 4, или из 96-ти - 8. В том и другом случае имеем 88; к этому числу приписывают произведение «дополнений»: 8 х 4 = 32. Получаем результат 8832.

Что полученный результат должен быть верен, наглядно видно из следующих преобразований:

$$92\times96=\begin{cases}88\times96=88\,(100-4)=88\times100-88\times4\\ 4\times96=4\,(88+8)=4\times8+88\times4\\ \hline 92\times96 \qquad\qquad 8832+0\end{cases}.$$

Какой день недели?

Умение быстро определять день недели, на какой приходится та или иная дата (например, 17 января 1893 г., 4 сентября 1943 г. и т. п.), основано на знании особенностей нашего календаря, которые мы сейчас и изложим.

1-е января 1-го года нашей эры приходилось (это установлено расчетом) на субботу. Так как в каждом простом году 365 дней, или 52 полных недели и 1 день, то год должен кончаться тем же днем недели, каким начался; поэтому последующий год начинается одним днем недели позже, чем предыдущий. Если 1 января 1-го года была суббота, то 1января 2-го года было днем позже, т. е. воскресенье, 3-го года - на 2 дня позже; а 1 января, например, 1923-го года было бы на 1922 дня (1923-1) после субботы, - если бы не было ни одного високосного года. Число високосных лет мы найдем, разделив 1923 на 4 = 480; но отсюда,

для нового стиля [76], надо исключить календарную разницу в 13 дней: 480-13 = 467. К полученному числу надо прибавить число дней, протекших после 1 января 1923-го года до определяемой даты - скажем для примера, до 14 декабря: это составит 347 дней.

Сложив 1922, 467 и 347, мы делим сумму на 7 и по полученному остатку 6 определяем, что 14 декабря 1923-го года при ходилось на 6 день после субботы, - а именно на пятницу.

$$\begin{array}{r} 1922 \\ +\ 467 \\ \quad 347 \\ \hline 2736 \end{array}$$

Такова сущность вычислений недельного дня любой даты. На практике дело значительно упрощается. Прежде всего заметим, что в течение каждого 28-летнего периода бывает, вообще говоря, 7 високосных лет (неделя), - так что каждые 28 лет день недели любой даты должен повторяться. Кроме того вспомним, что в предыдущем примере мы вычли из 1923 сначала 1, а затем календарную разницу обоих стилей, т. е. 13, всего 1 + 13 = 14 дней, или две полных недели. Но полное число недель, понятно, не влияет на результат. Поэтому для дат XX века надо принимать во внимание только: 1) число дней, протекших с 1 января данного года - в нашем примере 347; затем 2) прибавить число дней, соответствующее остатку лет от деления 1923 на 28, и, наконец, 3) число високосных лет в этом остатке, т. е. 4. Сумма этих трех чисел (347 + 19 + 4), т. е. 370, дает при делении на 7 тот же остаток 6 (пятница), который был получен нами раньше.

$$\begin{array}{r} 347 \\ +\ 19 \\ \quad 4 \\ \hline 370 \end{array}$$

Таким же образом мы найдем, что 15 января 1923 г. приходилось на понедельник (14 + 19 + 4 = 37; 37: 7 - в остатке 2). Для 9 февраля нов. ст. 1917 г. мы нашли бы 39 + 13 + 3 = 55; при делении 55 на 7 получаем в остатке 6 - пятница. Для 29 февраля нов. ст. 1904 г.: 59 + 0-1[77] = 58; остаток от деления на 7 здесь 2 - понедельник.

Дальнейшее упрощение состоит в том, что вместо полного числа дней месяца (при исчислении числа дней, протекших после 1января заданного года) принимают в расчет только его остаток от деления на 7.

Далее, разделив 1900 на 28, получаем в остатке 24 года, в которых содержится 5 високосных лет; прибавив их к 24-м и найдя, что сумма 24 + 5, т. е. 29, дает при делении на 7 остаток 1, определяем, что 1 января 1900 года было в 1-й день недели. Отсюда для первых чисел каждого месяца получаем следующие цифры, определяющие соответствующие им дни недели (мы будем их называть «остаточными числами»).

Остаточные числа для:

января		1
февраля	1+31 = 32, или	4
марта	4+28 = 32, или	4
апреля	4+31 = 35, или	0
мая	0+30 = 30, или	2
июня	2+31 = 33, или	5
июля	5+30 = 35, или	0
августа	0+31 = 31, или	3
сентября	3+31 = 34, или	6
октября	6+30 = 36, или	1
ноября	1+31 = 32, или	4
декабря	4+30 = 34, или	6.

Запомнить эти числа нетрудно; кроме того, их можно нанести на циферблат карманных часов, поставив возле каждой цифры циферблата соответствующее число точек[78].

Сделаем теперь расчет дня недели, например, для 31 марта 1923 г.

Число месяца	31
Остаточное число для марта	4
С начала столетия прошло лет	23
В том числе високосных	5
Сумма	63.

Остаток от деления на 7 - это 0, т. е. суббота.

Задача № 55

Найти день недели 16 апреля 1948 г.

Решение

Число дней месяца 16
Остаточное число для апреля 0
С начала столетия прошло лет 48
В том числе високосных 12
Сумма 76.

Остаток от деления на 7 - это 6, т. е. пятница.

Задача № 56

Найти день недели 29 февраля 1912 г. (нов. ст.).

Решение

Число месяца 29
Остаточное число для февраля 4
С начала столетия прошло лет 12
В том числе високосных* 2
Сумма 47.

** Принято во внимание, что один високосный год уже был учтен, когда мы взяли дату 29 февраля. Поэтому пишем не 3 високосных года, а 2.*

Остаток от деления на 7 - это 5, т. е. четверг.

Для дат предшествующих столетий (XIX, XVIII и т. д.) можно

пользоваться теми же числами; но надо помнить, что в XIX веке разница между новым и старым стилем была не 13, а 12 дней; кроме того, при делении 1800:28 получается в остатке 8, что вместе с 2 високосными годами в этом остатке составляет 10 (или 10-7 = 3), т. е. соответствующее характерное число для дат XIX века должно быть увеличено на 3-1 = 2. Так что, например, день недели 31 декабря 1864 г. нов. стиля мы определим сначала по предыдущему, а затем внесем соответствующую поправку - прибавим 2 дня.

Число месяца 31
Остаточное число для декабря 6
С начала столетия прошло лет 64
В том числе високосных 16
Поправка для XIX века 2
Сумма 119.

Остаток от деления на 7 - это 0, т. е. суббота.

Задача № 57

Найти день недели 25 апреля нов. ст. 1886 г.

Решение

Число месяца 25
Остаточное число для апреля 0
С начала столетия прошло лет 86
В том числе високосных 21
Поправка для XIX века 2
Сумма 134.

Остаток от деления на 7 - это 1, т. е. воскресенье.

После недолгого упражнения можно и еще более упростить вычисления, а именно - писать, вместо приведенных здесь чисел, прямо

их остатки от деления на 7. Например, день недели 24 марта 1934 г. мы определим в результате следующих простых выкладок:

Вместо числа месяца (24)	3
Остаточное число для марта	4
Вместо числа лет, прошедших от 1900 г.	6
В том числе високосных	1
Сумма 0 (вместо 14).	

Искомый день - суббота.

Подобного рода упрощенными приемами пользуются обычно те эстрадные вычислители, которые показывают публике свое искусство быстрого счета. Как видите, все это очень просто и может быть выполнено каждым после непродолжительного упражнения[79].

Календарь на часах

Знание этих маленьких секретов может не только пригодиться нам для выполнения фокусов, но и сослужить службу в повседневной жизни. Мы легко можем превратить свои карманные часы в «вечный календарь, с помощью которого сможем определить дни недели любых дат какого угодно года. Для этого понадобится только, осторожно сняв стеклышко с часов, нанести на циферблате тушью точки возле цифр в числе, соответствующем таблице (стр. 265). Как пользоваться этими точками, мы уже знаем. Особенно просто это для дат XX столетия: к

числу точек прибавляют число месяца, последние две цифры года и частное от деления их на 4, а еще лучше - остатки от деления этих чисел на 7. Остаток от деления суммы этих 4 слагаемых на 7 показывает день недели, а именно:

0 - суббота.

1 - воскресенье.

2 - понедельник.

3 - вторник и т. д.

Еще проще пользование часами-календарем для дат текущего года. Для каждого года нужно лишь держать в памяти остаток от деления на 7 суммы числа прошедших от начала века лет и четверти этого числа; этот остаток постоянно должен прибавляться к числу месяца определяемой даты вместе с числом точек возле соответствующей цифры. Остаток этот можно было бы прибавить к числу точек и наносить ежегодно на циферблат, чтобы не было надобности вводить его в вычисление особо. Но едва ли это практично.

I	1
II	4
III	4
IV	0
V	2
VI	5
VII	0
VIII	3
IX	6
X	1
XI	4
XII	6

Само собою разумеется, что «вечный календарь» указанного типа возможно устроить не только на карманных часах. Вы можете просто приклеить к карандашу, линейке, к краю записной книжки, вообще к любому предмету, часто бывающему у вас под руками, узенькую полоску бумаги с соответствующей табличкой чисел, характерных для каждого месяца, и маленький вездесущий вечный календарь готов.

Календарные задачи

Читателям, желающим испытать свои силы в решении разнообразных календарных задач, предлагаю ответить на следующие вопросы:

Почему ежегодно все числа апреля бывают в те же дни недели, что и в июле? Все числа марта бывают в те же дни недели, что и в ноябре? Сентябрьские даты - в те же дни недели, что и декабрьские? Майские - в те же дни, что и январские следующего года?

Почему в невисокосные годы 1 января бывает тот же день недели, что и 1 октября? 1 февраля, 1 марта и 1 ноября бывает один и тот же день недели?

Объясните, почему в пределах одного столетия календарь повторяется каждые 28 лет? Почему в течение этого 28-летнего периода одни и те же числа месяцев приходятся на одинаковые дни недели через следующие промежутки: 11 лет, 6 лет, 5 лет, 6 лет?

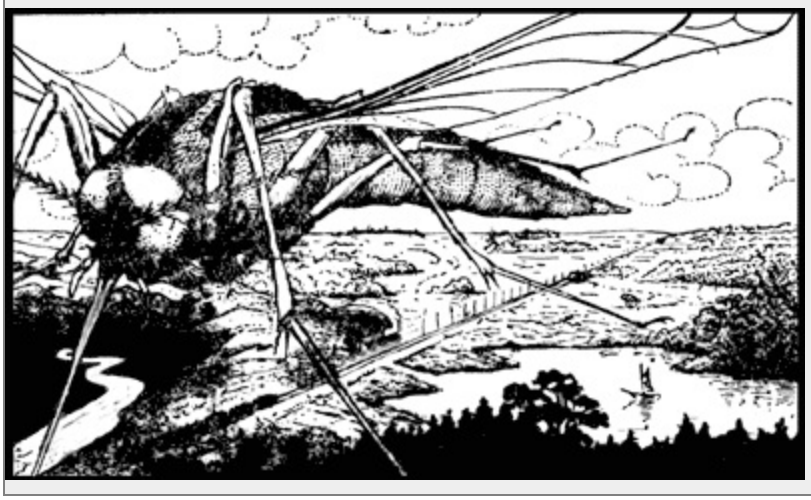
Объясните, почему даты какого-либо года XX века повторяются в те же дни недели, в какие приходились они в XIX веке 40 и 96 лет тому назад?

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КУРЬЕЗ

$2^5 \times 9^2 = 2592$

Глава VIII

Числовые великаны



Как велик миллион?

Величественная внушительность числовых великанов - миллиона, миллиарда, даже триллиона - заметно померкла в наших глазах за те годы, когда числа эти вместе с потоком бумажных денег проникли в нашу повседневную жизнь. Когда месячные расходы в хозяйстве небольшой семьи достигали миллиардов, а бюджет второстепенного учреждения выражался триллионами, естественна была мысль, что эти, некогда недоступные воображению, числа вовсе не так огромны, как твердили нам до сих пор. Трудно поражаться громадности семизначного числа рублей, за которое не давали и полной крынки молока. Не подавляет ума миллиард, на который не купишь сапог.

Но было бы заблуждением думать, что благодаря проникновению числовых великанов из своих недоступных высот в прозу житейского обихода мы познакомились с ними лучше, чем раньше. Миллион по-прежнему остается для большинства людей тем, чем и был - «знакомым незнакомцем». Скорее даже наоборот: ходячее представление о миллионе сделалось еще превратнее. Мы и раньше склонны были преуменьшать величину этого числа, превышающего силу нашего

воображения. Когда же миллионными числами стали выражаться весьма скромные, в сущности, ценности, миллион сжался в нашем воображении до размера довольно обыкновенного, легкодоступного числа. Мы впадали при этом в курьезную психологическую ошибку: то, что миллион рублей сделался сравнительно небольшой суммой, мы относили не за счет уменьшения денежной единицы, а за счет уменьшения миллиона. Я слышал, как человек, узнав впервые, что от Земли до Солнца 150 миллионов километров, простодушно воскликнул:

- Только всего?

Другой, прочтя, что от Петрограда до Москвы миллион шагов, заметил:

- Только один миллион шагов до Москвы? А мы-то платим за билет двести миллионов!…

Большинство людей, так свободно обращавшихся с миллионами при денежных расчетах, все-таки не отдавали себе ясного отчета в том, насколько эти числа огромны. Для этого следовало бы упражняться в миллионном счете не таких изменчивых единиц, как рубль, а предметов, всегда сохраняющих в нашем воображении одну и ту же постоянную величину. Если вы хотите ощутить истинные размеры миллиона - попробуйте хотя бы проставить в чистой тетради миллион точек. Я не предлагаю вам доводить такую работу до конца (на это едва ли у кого достанет терпения); уже одно начало работы, его медленный ход даст вам почувствовать, что такое «настоящий» миллион.

Английский натуралист А. Р. Уоллес, знаменитый сподвижник Дарвина, придавал весьма серьезное значение развитию правильного представления о миллионе. Он предлагал[80] «в каждой большой школе отвести одну комнату или залу, на стенах которой можно было бы наглядно показать, что такое миллион. Для этой цели нужно иметь 100 больших квадратных листов бумаги, в 4 $^{1}/_{2}$ фута[81] каждый, разграфленных квадратиками в четверть дюйма, оставив равное число белых промежутков между черными пятнами. Через каждые 10 пятен нужно оставлять двойной промежуток, чтобы отделить каждую сотню пятен (10 x 10). Таким образом, на каждом листе будет по 10 тысяч черных пятен, хорошо различимых с середины комнаты, а все сто листов будут содержать миллион пятен. Такая зала была бы в высшей степени поучительна, особенно в стране, где о миллионах говорят очень развязно и тратят их без смущения. Между тем, никто не может оценить

достижений современной науки, имеющей дело с невообразимо большими или невообразимо малыми величинами, если неспособен их представить наглядно и, суммируя в целое, вообразить себе, как велико число один миллион, когда современной астрономии и физике приходится иметь дело с сотнями, тысячами и даже миллионами таких миллионов[82]. Во всяком случае, очень желательно, чтобы в каждом большом городе была устроена такая зала для наглядного показания на ее стенах величины одного миллиона».

Я предлагаю другой, более доступный для каждого, способ развить в себе возможно отчетливое представление о величине миллиона. Для этого нужно только дать себе труд поупражняться в мысленном миллионном счете и суммировании размеров мелких, но хорошо знакомых нам единиц - шагов, минут, спичек, стаканов и т. п. Результаты получаются нередко неожиданные, поразительные.

Приведем несколько примеров.

Миллион секунд

Задача № 58

Как вы думаете, сколько времени отняла бы у вас работа - пересчитать миллион каких-либо предметов, по одному каждую секунду?

Решение

Оказывается, что, считая безостановочно по 10 часов в сутки, вы закончили бы подсчет в месяц времени! Приблизительно

удостовериться в этом нетрудно даже устным вычислением: в часе 3600 секунд, в 10 часах - 36000; в трое суток вы, следовательно, пересчитаете всего около 100 тысяч предметов; а так как миллион в десять раз больше, то, чтобы досчитать до него, понадобится 30 дней[83]. Отсюда следует, между прочим, что предложенная ранее работа - проставить в тетради миллион точек - потребовала бы много недель самого усердного и неустанного труда[84]. Да и тетрадь для этого понадобилась бы страниц в тысячу. Тем не менее такой труд был однажды выполнен. В распространенном английском журнале я видел как-то воспроизведение страницы из тетради, «единственное содержание которой составляет миллион аккуратно расставленных точек, по тысяче на странице». Все 500 листов этой тетради были разграфлены карандашом и заполнены рукой одного беспримерно терпеливого учителя чистописания в середине прошлого столетия.

В миллион раз толще волоса

Задача № 59

Тонкость волоса вошла чуть не в поговорку. Все часто видят волос и хорошо знают, насколько он тонок. Толщина человеческого волоса - около 0,07 мм. Мы округлим ее до 0,1 мм. Представьте себе, однако, что волос стал в миллион раз толще - какова тогда была бы его толщина. Был ли бы он толщиной в руку? В бревно? Или в большую бочку? Или, может быть, ширина его достигла бы ширины комнаты средних размеров?

Если вы никогда не задумывались над такой задачей, то можно поручиться, что, не проделав вычисления, - вы дадите грубо ошибочный ответ. Мало того: вы будете, пожалуй, даже оспаривать правильный ответ - настолько покажется он неправдоподобным. Каков же он?

Решение

Оказывается, что волос, увеличенный по толщине в миллион раз, имел бы около сотни метров в поперечнике! Это кажется невероятным, но дайте себе труд сделать подсчет, и вы убедитесь, что так и есть: 0,1 мм x 1000000 = 0,1 м x 1000 = 0,1 км = 100 м[85].

Упражнения с миллионом

Проделайте - попытайтесь выполнить это устно - еще ряд упражнений, чтобы освоиться надлежащим образом с величиною миллиона.

Задача № 60

Величина обыкновенной комнатной мухи общеизвестна - около 7 мм в длину. Но какова была бы ее длина при увеличении в миллион раз?

Решение

Умножим 7 мм на 1000000, получим 7 км - примерно ширина Москвы или Ленинграда. С трудом верится, что муха или комар, увеличенные по длине в миллион раз, могли бы покрыть своим телом столичный город!

Задача № 61

Увеличьте мысленно в миллион раз (по ширине) ваши карманные часы, - и получите снова поражающий результат, который едва ли вам удастся предугадать. Какой?

Решение

Часы имели бы в ширину километров 50, а каждая цифра простиралась бы на целую географическую милю (7 км).

Задача № 62

Какой высоты достигал бы человек в миллион раз выше обычного роста?

Решение

1700 километров. Он был бы всего в 8 раз меньше поперечника земного шара. Буквально одним шагом мог бы он перешагнуть из Ленинграда в Москву, а если бы лег, то растянулся бы от Ленинграда до Крыма…

Приведу еще несколько готовых подсчетов того же рода, предоставляя проверку их читателю.

Сделав миллион шагов по одному направлению, вы отошли бы км на 600. От Москвы до Ленинграда примерно и будет миллион шагов.

Миллион человек, выстроенных в одну шеренгу плечом к плечу,

растянулись бы на 250 км.

Миллионом стаканов воды можно наполнить 200 огромных бочек.

Миллион точек типографского шрифта, - например этой книги, - поставленные рядом, вплотную, растянулись бы метров на 50-100.

Зачерпывая миллион раз наперстком, вы вычерпаете около тонны жидкости (в 80-ведерную бочку).

Книга в миллион страниц имела бы в толщину метров 50.

Миллион букв заключает книга убористой печати в 600-800 страниц среднего формата.

Миллион дней - более 27 столетий. От начала нашей эры не прошло еще миллиона дней!

Названия числовых великанов

Прежде чем перейти к еще большим числовым гигантам - миллиардам, биллионам, триллионам и т. д. - остановимся немного на их названиях. Слово «миллион» понимается всеми одинаково: тысяча тысяч. Но слова биллион, триллион и т. д. сравнительно не так давно придуманы и еще не получили единообразного значения. При финансовых расчетах и в житейском обиходе принято у нас называть «биллионом» тысячу миллионов, а «триллионом» - миллион миллионов. Но в книгах по астрономии и физике вы встречаете эти названия в другом значении: биллион означает здесь не тысячу, а миллион миллионов, триллион - миллион миллионов миллионов, квадрильон - миллион миллионов миллионов миллионов, и т. д. Короче говоря: в научных книгах каждое новое высшее наименование принято давать миллиону низших, а в финансовых расчетах и в обиходе - тысяче низших.

Приведенная здесь табличка наглядно показывает это различие:

В обиходе и в финансовых расчетах:	квинтильоны	квадрильоны	триллионы	биллионы	миллионы	тысячи	единицы
	0	000	000	000	000	000	000
В астрономии и физике:	триллион						

Вы видите, что физик называет биллионом то, что финансист называет триллионом, и т. д., так что, во избежание недоразумений, следует наименование всегда сопровождать цифрами. Это, пожалуй, единственный случай в практике, когда обозначение суммы прописью затемняет, а не поясняет написанное цифрами. Вы видите также, что астрономы и физики гораздо экономнее пользуются новыми названиями, чем финансисты, которым, впрочем, нет основания особенно скупиться в этом отношении, так как им почти не приходится иметь дело более чем с 12-значными числами; в науке же 20-значные числа - нередкие гости[86].

Миллиард

Слово «миллиард» употребляется у нас в смысле тысячи миллионов и при денежных вычислениях, и в точных науках. Но, например, в Германии и в Америке под миллиардом иногда разумеют не тысячу, а всего сто миллионов. Этим, между прочим, можно объяснить то, что слово «миллиардер» было в ходу за океаном еще тогда, когда ни один из тамошних богачей не имел состояния в тысячу миллионов.

Огромное состояние Рокфеллера незадолго до войны исчислялось «всего» 900 миллионов долларов, а остальных «миллиардеров» - меньшими числами. Только во время войны появились в Америке миллиардеры в нашем смысле слова (их иногда называют на родине «биллионерами»).

Чтобы составить себе представление об огромности миллиарда, подумайте о том, что в книжке, которую вы сейчас читаете, заключается немногим более 200.000 букв. В пяти таких книжках окажется один миллион букв. А миллиард букв будет заключать в себе стопка из 5.000 экземпляров этой книжки - стопка, которая, будучи аккуратно сложена, составила бы столб высотой с Исакиевский собор.

Миллиард секунд часы отобьют более чем в 30 лет (точнее в 31,7лет). А миллиард минут составляет более 19 столетий; человечество всего двадцать четыре года назад[87] (29 апреля 1902 года в 10 часов 40 мин.) начало считать второй миллиард минут от первого дня нашего летосчисления.

Биллион и триллион

Ощутить огромность этих числовых исполинов трудно даже человеку, опытному в обращении с миллионами. Великан-миллион - такой же карлик рядом со сверх-великаном биллионом, как единица рядом с миллионом. Об этом взаимоотношении мы обыкновенно забываем и не делаем в своем воображении большой разницы между миллионом, биллионом и триллионом. Мы уподобляемся здесь тем первобытным народам, которые умеют считать только до 2 или до 3, а все числа свыше их одинаково обозначают словом много. «Подобно тому, как ботокудам[88] кажется несущественной разница между двумя и тремя, - говорит известный германский математик проф. Г. Шуберт, - так и многим современным культурным людям представляется несущественной разница между биллионом и триллионом. По крайней мере, они не думают о том, что одно из этих чисел в миллион раз больше другого и что, значит, первое относится ко второму приблизительно так, как расстояние от Берлина до Сан-Франциско

относится к ширине улицы».

Волос, увеличенный по толщине в биллион раз, был бы раз в 8 шире земного шара, а муха при таком увеличении была бы в 70 раз толще Солнца!

Взаимоотношение между миллионом, биллионом и триллионом можно с некоторою наглядностью представить следующим образом. В Ленинграде еще недавно было миллион жителей. Вообразите же себе длинный прямой ряд городов, таких как Ленинград, - целый миллион их; в этой цепи столиц, тянущихся на семь миллионов километров (в 20 раз дальше Луны) будет насчитываться биллион жителей… Теперь вообразите, что перед вами не один такой ряд городов, а целый миллион рядов, т. е. квадрат, каждая сторона которого состоит из миллиона Ленинградов и который внутри сплошь уставлен Ленинградами: в этом квадрате будет триллион жителей.

Одним триллионом кирпичей можно было бы, размещая их плотным слоем по твердой поверхности земного шара, покрыть все материки равномерным сплошным пластом высотою с четырехэтажный дом (16 м).

Если бы все видимые в сильнейшие телескопы звезды обоих небесных полушарий, т. е. не менее 500 миллионов звезд - были обитаемы и населены каждая, как наша Земля, то на всех этих звездах, вместе взятых, насчитывался бы только один триллион людей.

Последнюю иллюстрацию мы заимствуем из мира мельчайших частиц, составляющих все тела природы - из мира молекул. Молекула по ширине меньше точки типографского шрифта этой книги примерно в миллион раз. Вообразите же триллион таких молекул[89], нанизанных вплотную на одну нитку. Какой длины была бы эта нить? Ею можно было бы семь раз обмотать земной шар по экватору!

Квадрильон

В старинной (XVIII в.) «Арифметике» Магницкого, о которой мы не раз уже упоминали, приводится таблица названий классов чисел, доведенная до квадрильона, т. е. единицы с 24 нулями[90].

Это было большим шагом вперед по сравнению с более древним числовым инвентарем наших предков. Древняя славянская лестница больших чисел была до XV века гораздо скромнее и достигала только до ста миллионов. Вот эта старинная нумерация:

«тысяща»..... 1000
«тьма»..... 10 000
«легион»..... 100 000
«леодр»..... 1 000 000
«вран»..... 10 000 000
«колода»..... 100 000 000.

Магницкий широко раздвинул древние пределы больших чисел в своей табличке. Но он считал практически бесполезным доводить систему наименований числовых великанов чересчур далеко. Вслед за его таблицей он помещает такие стихи:

Числ есть бесконечно,
умом нам недотечно,
И никто знает конца,
кроме всех бога творца.
Несть бо нам определьно
тем же есть и безцельно
Множайших чисел искати
и больше сей писати
Превосходной таблицы
умов наших границы
И аще кому треба
счисляти что внутрь неба
Довлеет числа сего
к вещем всем мира сего.

Наш старинный математик хотел сказать этими стихами, что так как ум человеческий не может обнять бесконечного ряда чисел, то бесцельно составлять числа больше тех, которые представлены в его таблице, «умов наших границе». Заключающиеся в ней числа (от 1-цы до квадрильонов включительно) достаточны для исчисления всех вещей видимого мира, - достаточны для тех, «кому треба счисляти что внутрь неба».

Любопытно отметить, что Магницкий оказался в данном случае

почти прозорливцем. По крайней мере, до самого последнего времени наука не ощущала еще нужды в числах высшего наименования, чем квадрильоны. Расстояния самых отдаленных звездных скоплений, по новейшим оценкам астрономов исчисляемые в сотни тысяч «цветовых лет»[91], в переводе на километры выражаются триллионами. Это - доступные сильнейшим телескопам видимые границы вселенной. Расстояние всех других звезд, расположенных «внутри неба», выражаются, конечно, меньшими числами. Общее чис - л о звезд исчисляется «всего лишь» сотнями миллионов. Древность старейших из них не превышает, по самой щедрой оценке, биллиона лет. Массы звезд исчисляются тысячами квадрильонов тонн.

Обращаясь в другую сторону, к миру весьма малых величин, мы и здесь не ощущаем пока надобности пользоваться числами свыше квадрильонов. Число молекул в кубическом сантиметре газа - одно из самых больших множеств, реально исчисленных, - выражается десятками триллионов. Число колебаний в секунду для самых быстроколеблющихся волн лучистой энергии (лучей Гесса) не превышает 40 триллионов. Если бы мы вздумали подсчитать, сколько капель в океане (считая даже объем капли 1 куб. миллиметр, - что весьма немного), нам и тогда не пришлось бы обратиться к наименованиям выше квадрильона, потому что число это исчисляется только тысячами квадрильонов.

И лишь при желании выразить числом, сколько граммов вещества заключает вся наша солнечная система, понадобились бы наименования выше квадрильона, потому что в числе этом 34 цифры (2 и 33 нуля): это - две тысячи квинтильонов.

Если вам интересно, каковы наименования сверх-исполинов, следующих за квадрильоном, вы найдете их в приводимой здесь табличке:

наименования	единица со сколькими нулями:
квадрильон	с 24-мя
квинтильон	с 30-ю
секстильон	с 36-ю
септильон	с 42-мя
октальон	с 48-ю
нональон	с 54-мя
декальон	с 60-ю
эндекальон	с 66-ю
додекальон	с 72-мя.

Далее наименований не имеется. Но и эти, в сущности, почти не употребляются, да и мало кому известны. Как велики выражаемые ими числа, видно хотя бы из того, что число граммов вещества во вселенной (по современным воззрениям) «всего» 10 нональонов.

Кубическая миля и кубический километр

В заключение остановимся на арифметическом (вернее, пожалуй, геометрическом) великане особого рода - на кубической миле: мы имеем в виду географическую милю - составляющую 15-ю долю экваториального градуса и заключающую 7420 метров. С кубическими мерами наше воображение справляется довольно слабо; мы обычно значительно преуменьшаем их величину - особенно для крупных кубических единиц, с которыми приходится иметь дело в астрономии. Но если мы превратно представляем себе уже кубическую милю - самую большую из наших объемных мер, - то как ошибочны должны быть наши представления об объеме земного шара, других планет, солнца? Стоит поэтому уделить немного времени и внимания, чтобы постараться приобрести о кубической миле более соответствующее представление.

В дальнейшем воспользуемся картинным изложением талантливого германского популяризатора А. Бернштейна, приведя (в несколько измененном виде) длинную выписку из его полузабытой книжечки -

«Фантастическое путешествие через вселенную» (появившейся более полувека тому назад).

«Положим, что по прямому шоссе мы можем видеть на целую милю ($7\ ^1/_2$ км) вперед. Сделаем мачту длиною в милю и поставим ее на одном конце дороги, у верстового столба. Теперь взглянем вверх и посмотрим, как высока наша мачта. Положим, что возле этой мачты стоит одинаковый с ней высоты человеческая статуя - статуя более семи километров высоты. В такой статуе колено будет находиться на высоте 1800 метров; нужно было бы взгромоздить одну на другую 25 египетских пирамид, чтобы достигнуть до поясницы статуи!

Вообразим теперь, что мы поставили две таких мачты вышиною в милю на расстоянии мили одна от другой и соединили обе мачты досками; получилась бы стена в милю длины и милю вышины. Это - квадратная миля.

Если бы подобная стена действительно существовала, например, вдоль Невы в Ленинграде, то - заметим мимоходом, - климатические условия этого места изменились бы баснословным образом: северная сторона города могла бы иметь еще суровую зиму, когда южная уже наслаждалась бы ранним летом. В марте месяце можно было бы с одной стороны стены прогуливаться в лодке, а с другой - ездить в санях и кататься на коньках… Но мы отвлеклись в сторону.

Мы имеем деревянную стену, стоящую отвесно. Представим себе еще четыре подобных стены, сколоченные вместе, как ящик. Сверху прикроем его крышкой в милю длины и милю ширины. Ящик этот займет объем кубической мили. Посмотрим теперь, как он велик, т. е. что и сколько в нем может поместиться.

Начнем с того, что, сняв крышку, бросим в ящик все здания Ленинграда. Они займут там очень немного места. Отправимся в Москву и по дороге захватим все губернские и уездные города. Но так как все это только покрыло дно ящика, то для заполнения его поищем материалов в другом месте. Возьмем Париж со всеми его триумфальными воротами, колоннами, башнями и бросим туда же. Все это летит, как в пропасть; прибавка едва заметна. Прибавим Лондон, Вену, Берлин. Но так как всего этого мало, чтобы хоть сколько-нибудь заполнить пустоту в ящике, то станем бросать туда без разбора все города, крепости, замки, деревни, отдельные здания. Все-таки мало. Бросим туда все, что только сделано руками человека в Европе; но и с

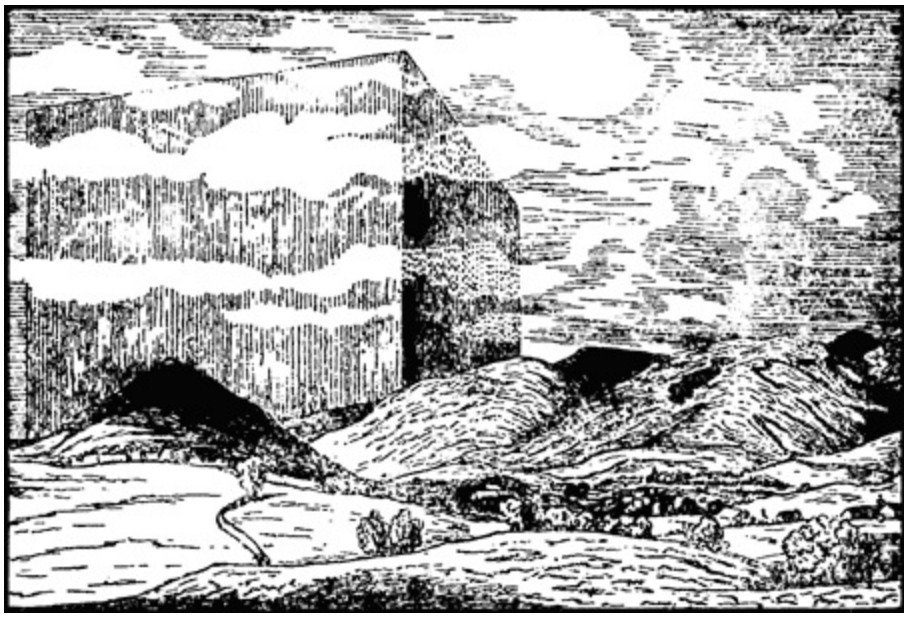
этим ящик едва наполняется до одной четверти. Прибавим все корабли мира; но и это мало помогает. Бросим в ящик все египетские пирамиды, все рельсы Старого и Нового Света, все машины и фабрики мира, - все, что сделано людьми в Азии, Африке, Америке, Австралии. Ящик заполняется едва до половины. Встряхнем его, чтобы в нем улеглось ровнее, и попробуем, нельзя ли дополнить его людьми.

Соберем всю солому и всю хлопчатую бумагу, существующую в мире, и расстелем ее в ящике, - мы получим слой, предохраняющий людей от ушибов, сопряженных с выполнением подобного опыта. Все население Германии - 50 миллионов человек - уляжется в первом слое. Покроем их мягким слоем в фут толщиною и уложим еще 50 миллионов. Покроем и этот слой и, кладя далее слой на слой, поместим в ящике все население Европы, Азии, Африки, Америки, Австралии… Все это заняло не более 35 слоев, т. е., считая слой толщиной в метр, - всего 35 метров. Понадобилось бы в 50 раз больше людей, чем их существует на свете, чтобы наполнить вторую половину ящика…

Что же нам делать? Если бы мы пожелали поместить в ящике весь животный мир - всех лошадей, быков, ослов, мулов, баранов, верблюдов, на них наложить всех птиц, рыб, змей, все, что летает и ползает, - то и тогда мы не наполнили бы ящика доверху без помощи скал и песку.

Такова кубическая миля. А из земного шара можно сделать 660 миллионов подобных ящиков! При всем почтении к кубической миле, к земному шару приходится питать еще большее уважение».

Теперь, когда неимоверная огромность кубической мили (около 350 куб. километров) стала до некоторой степени ощущаться читателем, мы прибавим, что целая кубическая миля пшеничных зерен насчитывала бы их «всего» несколько триллионов.



Весьма внушительную вместимость имеет и кубический километр. Нетрудно подсчитать, например, что ящик таких размеров мог бы вместить 5000 биллионов спичек, вплотную уложенных; для изготовления такого количества спичек фабрика, выпускающая миллион спичек в сутки, должна была бы работать 14 миллионов лет; а чтобы такое число спичек доставить, потребовалось бы 10 миллионов вагонов - поезд длиною в 100.000 километров, т. е. в 2 $^{1}/_{2}$ раза длиннее земного экватора. И все-таки в целом кубическом километре воды содержится не более одного триллиона мельчайших капель (считая объем капли в 1 куб. миллиметр), в миллион раз меньше квадрильона.

Исполинские размеры триллиона и квадрильона после сказанного о кубических миле и километре еще более выростают в нашем сознании.

Исполины времени

Огромные промежутки времени представляются нам еще более смутно, чем огромные расстояния и объемы. Между тем, геология говорит нам, что со времени отложения наиболее древних пластов земной коры протекли сотни миллионов лет. Как ощутить неизмеримую огромность таких периодов времени? Один немецкий писатель[92] предлагает для этого такой способ:

«Все протяжение истории Земли представим в виде прямой линии в 500 километров. Это расстояние пусть изображает те 500 миллионов лет, которые протекли от начала кембрийской эпохи (одна из древнейших эпох истории земной коры). Так как километр представляет длительность миллиона лет, то последние 500-1000 метров изобразят длительность ледникового периода; а 6.000 лет мировой истории сократятся до 6 метров - длина комнаты, в масштабе которой 70 лет жизни человека представляются линией в 7 сантиметров. Если заставить улитку проползти все названное расстояние с нормальной для улитки скоростью 3,1 мм в секунду, то на все расстояние ей понадобится ровно 5 лет. А все протяжение от начала мировой войны до наших дней она одолеет в 3 секунды… Мы видим, как ничтожны в масштабе истории Земли те небольшие сроки, которые человек может обнять своим умом. Как ничтожна вся история человечества, которую наше самомнение окрестило «всемирной» историей, и как бесконечно мала в потоке мировых событий одна человеческая жизнь!»

ЗАДАЧА-ШУТКА

Какое число делится на все числа без остатка?
(ответ - на стр. 302).

Глава IX

Числовые лилипуты

От великанов к карликам

Гулливер в своих странствованиях, покинув карликов-лилипутов, очутился среди великанов. Мы путешествуем в обратном порядке: познакомившись с числовыми исполинами, переходим к миру лилипутов, - к числам, которые во столько же раз меньше 1-цы, во сколько раз единица меньше числового великана.

Разыскать представителей этого мира не составляет никакого труда: для этого достаточно написать ряд чисел, обратных миллиону, миллиарду, биллиону и т. д., т. е. делить 1-цу на эти числа. Получающиеся дроби

$$\frac{1}{1.000.000}, \frac{1}{1.000.000.000}, \frac{1}{1.000.000.000.000} \text{ и т. д.}$$

есть типичные числовые лилипуты, такие же пигмеи по сравнению с единицей, каким является единица по сравнению с миллионом, миллиардом, биллионом и прочими числовыми исполинами.

Вы видите, что каждому числу-исполину соответствует число-

лилипут, и что, следовательно, числовых лилипутов существует не меньше, чем исполинов. Для них также придуман сокращенный способ обозначения. Мы уже упоминали, что весьма большие числа в научных сочинениях (по астрономии, физике) обозначаются так:

1.000.000 ..... 10^6
10.000.000 ..... 10^7
400.000.000 ..... 4.10^8
6 квадрильонов ..... 6.10^{24} и т. д.

Соответственно этому, числовые лилипуты обозначаются следующим образом:

$\frac{1}{1.000.000}$ ..... 10^{-6}
$\frac{1}{100.000.000}$ ..... 10^{-8}
$\frac{3}{1.000.000.000}$ ..... 3.10^{-9} и т. д.

Есть ли, однако, реальная надобность в подобных дробях? Приходится ли когда-нибудь действительно иметь дело со столь мелкими долями единицы?

Об этом интересно побеседовать подробнее.

Лилипуты времени

Секунда, по обычному представлению, есть настолько малый промежуток времени, что с весьма мелкими частями ее не приходится иметь дела ни при каких обстоятельствах. Легко написать - $^1/_{1000}$ секунды, - но это чисто бумажная величина, потому что ничего не может произойти в такой ничтожный промежуток времени.

Так думают многие, - но ошибаются, потому что в тысячную долю секунды могут успеть совершиться весьма различные явления. Поезд, проходящий 36 километров в час, делает в секунду 10 метров, и, следовательно, в течение 1000-й доли секунды успевает продвинуться на один сантиметр. Звук в воздухе переносится в течение 1000-й доли секунды на 33 сантиметра, а пуля, покидающая ружейный ствол со

скоростью 700-800 метров в секунду, переносится за тот же промежуток времени на 70 сантиметров. Земной шар перемещается каждую 1000-ю долю секунды, в своем обращении вокруг солнца, на 30 метров. Струна, издающая высокий тон, делает в 1000-ю долю секунды 2-4 и более полных колебаний; даже комар успевает в это время взмахнуть вверх или вниз своими крылышками. Молния длится гораздо меньше 1000-й доли секунды: в течение этого промежутка времени успевает возникнуть и прекратиться столь грозное явление природы (молния простирается в длину на целые километры).

Но - возразите вы, - 1000-я доля секунды еще не подлинный лилипут, как никто не назовет тысячу числовым гигантом. Если взять миллионную долю секунды, то уж наверное можно утверждать, что это - величина нереальная, промежуток времени, в течение которого ничего произойти не может. Ошибаетесь: даже и одна миллионная доля секунды - для современного физика, например, - вовсе не чрезмерно маленький промежуток. В области явлений световых (и электрических) ученому сплошь и рядом приходится иметь дело с гораздо более мелкими частями секунды. Напомним прежде всего, что световой луч пробегает ежесекундно (в пустоте) 300.000 километров; следовательно, в 1.000.000-ю долю секунды свет успевает перенестись на расстояние 300 метров - примерно на столько же, на сколько переносится в воздухе звук в течение целой секунды.

Далее: свет есть явление волнообразное, и число световых волн, проносящихся ежесекундно через точку пространства, исчисляется сотнями биллионов. Те световые волны, которые, действуя на наш глаз, вызывают ощущение красного света, имеют частоту колебаний 400 биллионов в секунду; это значит, что в течение одной 1.000.000-й доли секунды в наш глаз вступает 400.000.000 волн, а одна волна вступает в глаз в течение 400 000 000 000 000-й доли секунды. Вот подлинный числовой лилипут!

Но этот несомненный, реально существующий лилипут является истинным великаном по сравнению с еще более мелкими долями секунды, с которыми физик встречается при изучении Рентгеновых лучей. Эти удивительные лучи, обладающие свойством проникать через многие непрозрачные тела, представляют собою, как и видимые лучи, то же волнообразное явление, но частота колебаний у них значительно больше, чем у видимых: она достигает 25000 биллионов в секунду!

Волны следуют тут одна за другой в 60 раз чаще, чем в лучах видимого красного света. Лучи «гамма» и недавно открытые «космические» лучи Гесса обладают частотою еще большею, чем лучи Рентгена. Значит, и в мире лилипутов существуют свои великаны и карлики. Гулливер был выше лилипутов всего в дюжину раз и казался им великаном. Здесь же один лилипут больше другого лилипута в пять дюжин раз и, следовательно, имеет все права именоваться по отношению к нему исполином.

Лилипуты пространства

Интересно рассмотреть теперь, какие наименьшие расстояния приходится отмеривать и оценивать современным исследователям природы.

В метрической системе мер наименьшая единица длины для обиходного употребления - миллиметр; она примерно вдвое меньше толщины спички. Чтобы измерять предметы, видимые простым глазом, такая единица длины достаточно мелка. Но для измерения бактерий и других мелких объектов, различимых только в сильные микроскопы, миллиметр чересчур крупен. Ученые обращаются для таких измерений к более мелкой единице - микрону, который в 1000 раз меньше миллиметра. Так называемые красные кровяные тельца, которые насчитываются десятками миллионов в каждой капельке нашей крови, имеют в длину 7 микронов и в толщину 2 микрона. Стопка из 1000 таких телец имеет толщину спички.

Как ни мелок кажется нам микрон, он все же оказывается чрезмерно крупен для расстояний, которые приходится измерять современному физику. Мельчайшие, недоступные даже микроскопу частицы, молекулы, из которых состоит вещество всех тел природы, и слагающие их еще более мелкие атомы имеют размеры от одной 10000-й до одной 1000-й доли микрона. Если остановиться на последней, наибольшей величине, то и тогда окажется, что миллион таких крупинок (а мы уже знаем, как велик миллион), будучи расположен на одной прямой, вплотную друг к другу, занял бы всего лишь один

миллиметр!

Чтобы представить себе наглядно чрезвычайную малость атомов, обратимся к такой картине. Вообразите, что все предметы на земном шаре увеличились в миллион раз. Эйфелева башня (300 м высоты) уходила бы тогда своей верхушкой на 300000 км в мировое пространство и находилась бы в недалеком соседстве от орбиты Луны. Люди были бы высотой с большую гору - в 1 $^1/_2$ км; один шаг такого человека-гиганта унес бы его на 600-700 км. Мельчайшие красные тельца, миллиардами плавающие в его крови, имели бы каждый более 7 м в поперечнике. Волос имел бы 100 м в толщину. Мышь достигала бы 100 км в длину, муха - 8 км. Каких же размеров будет при таком чудовищном увеличении атом вещества?

Положительно не верится: его размеры предстанут перед вами в виде… типографской точки шрифта этой книги!

Достигаем ли мы здесь крайних пределов пространственной малости, за которые не приходится переступать даже физику с его изощренными приемами измерений? Еще не особенно давно думали так; но теперь известно, что атом - целый мир, состоящий из гораздо более мелких частей и являющийся ареною действия могущественных сил. Атом, например, водорода состоит из центрального «ядра» и быстро обращающегося вокруг него «электрона». Не входя в другие подробности, расскажем только о размерах этих составных частей атома. Поперечник электрона измеряется биллионными долями миллиметра, а ядра - тысячебиллионными долями. Другими словами, поперечник электрона почти в миллион раз, а ядро - в миллиард раз меньше поперечника атома. Если вы пожелаете сравнить размеры электрона с размерами пылинки, то расчет покажет вам, что электрон меньше пылинки примерно во столько же раз, во сколько раз пылинка меньше - чего бы вы думали? Земного шара!

Вы видите, что атом, - лилипут среди лилипутов, - является в то же время настоящим исполином по сравнению с электроном, входящим в его состав - таким же исполином, каким вся солнечная система является по отношению к земному шару.

Можно составить следующую поучительную лестницу, в которой каждая ступень является исполином по отношению к предыдущей ступени и лилипутом по отношению к последующей:

электрон

атом
пылинка
дом
земной шар
солнечная система
расстояние до Полярной звезды.

Каждый член этого ряда примерно в четверть миллиона раз[93] больше предыдущего и во столько же раз меньше последующего. Ничто не доказывает так красноречиво всю относительность понятий «большой» и «малый», как эта табличка. В природе нет безусловно большого или безусловно малого предмета. Каждая вещь может быть названа и подавляюще огромной и исчезающе малой в зависимости от того, как на нее взглянуть, с чем ее сравнить. «Время и пространство, - закончим мы словами одного английского физика[94], - понятия чисто относительные. Если бы сегодня в полночь все предметы - в том числе и мы сами и наши измерительные приборы, - уменьшились в 1000 раз, мы совершенно не заметили бы этого изменения. Не было бы никакого указания на то, что произошло такое уменьшение. Точно так же, если бы все события и все часы получили ускорение хода в одинаковом отношении, то мы равным образом ничего не подозревали бы об этой перемене».

Сверх-исполин и сверх-лилипут

Наши беседы о великанах и карликах из мира чисел были бы не полны, если бы мы не рассказали читателю об одной изумительной диковинке этого рода, - диковинке, правда, не новой, но стоящей дюжины новинок. Чтобы подойти к ней, начнем со следующей, на вид весьма незамысловатой задачи:

Задача № 63

Какое самое большое число можно написать тремя цифрами, не употребляя никаких знаков действий?

Решение

Хочется ответить: 999, - но, вероятно, вы уже подозреваете, что ответ другой, иначе задача была бы чересчур проста. И действительно, правильный ответ пишется так:

$$9^{9^{9}}.$$

Выражение это означает: «девять в степени девять в девятой степени». Другими словами: нужно составить произведение из стольких девяток, сколько единиц в результате умножения:

9x9x9x9x9x9x9x9x9.

Достаточно только начать вычисление, чтобы ощутить огромность предстоящего результата. Если у вас хватит терпения выполнить перемножение девяти девяток, вы получите число:

387420489.

Главная работа только начинается: теперь нужно найти

$$9^{387420489},$$

т. е. произведение 387420489 девяток. Придется сделать круглым счетом 400 миллионов умножений…

У вас, конечно, не будет времени довести до конца подобное вычисление. Но я лишен возможности сообщить вам готовый результат - по трем причинам, которые нельзя не признать уважительными. Во-первых, число это никогда и никем еще не было вычислено (известен только приближенный результат). Во-вторых, если бы даже оно и было вычислено, то, чтобы напечатать его, понадобилось бы не менее тысячи таких книг, как эта, потому что число наше состоит из 369 693 100 цифр; набранное обыкновенным шрифтом, оно имело бы в длину 1000 км… Наконец, если бы меня снабдили достаточным количеством бумаги и чернил, я и тогда не мог бы удовлетворить вашего любопытства. Вы легко можете сообразить почему: если я способен

писать, скажем, без перерыва по две цифры в секунду, то в час я напишу 7200 цифр, а в сутки, работая непрерывно день и ночь, - не более 172800 цифр. Отсюда следует, что не отрываясь ни на секунду от пера, трудясь круглые сутки изо дня в день без отдыха, я просидел бы за работой не менее 7 лет, прежде чем написал бы это число…

Могу сообщить вам об этом числе только следующее: оно начинается цифрами 428124773175747048036987118 и кончается 89. Что находится между этим началом и концом - неизвестно. А ведь там 369693071 цифра!…

Вы видите, что уже число цифр нашего результата невообразимо огромно. Как же велико само число, выражаемое этим длиннейшим рядом цифр? Трудно дать хотя бы приблизительное представление о его громадности, потому что такого множества отдельных вещей, считая даже каждый электрон за отдельную вещь - нет в целой вселенной!

Архимед вычислил некогда, сколько песчинок заключал бы в себе мир, если бы весь он, до неподвижных звезд, был наполнен тончайшим песком. У него получился результат, не превышающий 1-цы с 63 нулями. Наше число состоит не из 64-х, а из 370 миллионов цифр - следовательно, оно неизмеримо превышает огромное число Архимеда.

Поступим же по примеру Архимеда, но вместо «исчисления песчинок» произведем «исчисление электронов». Вы уже знаете, что электрон меньше песчинки примерно во столько же раз, во сколько раз песчинка меньше земного шара. Для радиуса видимой вселенной примем расстояние в миллиард световых лет. Так как свет пробегает в секунду 300000 км, а в году 31 миллион секунд, то можно сосчитать, что «световой год» равен круглым счетом 10 биллионам км (гнаться за большой точностью здесь бесполезно). Значит, для радиуса всей известной нам вселенной получаем величину

10 миллиардов биллионов км

или - прибегая к способу изображения числовых великанов, объясненному на стр. 279, -

10^{22} км.

Объем шара такого радиуса можно вычислить по правилам геометрии: он равен (с округлением) 4 x 10^{66} куб. км. Умножив это число на число куб. сантиметров в куб. километре (10^{15}), получим для объема видимой вселенной величину

10^{81} куб. см[95].

Теперь представим себе, что весь этот объем сплошь заполнен самыми тяжелыми из известных нам атомов - атомами элемента урана, которых идет на грамм около 10^{22} штук. Их поместилось бы в шаре указанного объема 10^{103} штук. Известно, что в каждом атоме урана содержится 92 электрона. Округлив это число до 100, узнаем, что во всей доступной нашему исследованию вселенной могло бы поместиться не более

10^{105} электронов.

Число, состоящее «всего лишь» из 106 цифр… Как это мизерно по сравнению с нашим числовым великаном из 369 миллионов цифр!

Вы видите, что, наполняя всю вселенную - величайшее, что мы знаем - сплошь электронами, т. е. мельчайшим из того, что нам известно, - мы не исчерпали бы и небольшой доли того исполинского числа, которое скромно скрывается под изображением:

$$9^{9^{9}}.$$

Познакомившись с этим замаскированным гигантом, обратимся к его противоположности.

Соответствующий числовой лилипут получится, если разделим 1-цу на это число. Будем иметь:

$$\frac{1}{9^{9^{9}}}, \text{ т. е.}$$

что равно:

$$\frac{1}{9^{387420489}}.$$

Мы имеем здесь знакомое нам огромное число в знаменателе. Сверх-великан превратился в сверх-лилипута.

ОТВЕТ

на задачу-шутку

(предложенную на стр. 290):

Число, которое делится на все числа без остатка,

есть — *произведение всех чисел*

Глава X

Арифметические путешествия

Ваше кругосветное путешествие

В молодости я занимался в редакции одного распространенного Ленинградского журнала, где состоял секретарем. Однажды мне подали визитную карточку посетителя. Я прочел на ней незнакомое мне имя и совершенно необычайное обозначение профессии: «первый русский кругосветный путешественник пешком». По обязанностям службы мне не раз доводилось беседовать с путешественниками по всем частям света и даже с кругосветными, - но о «кругосветном путешественнике пешком» я никогда еще не слыхал. С любопытством поспешил я в приемную, чтобы познакомиться с этим предприимчивым и неутомимым человеком.

Замечательный путешественник был молод и имел очень скромный вид. На вопрос, когда успел он совершить свое необыкновенное путешествие, «первый русский кругосветный и т. д.» объяснил мне, что оно теперь именно и совершается. Маршрут? Шувалово - Ленинград[96]; о дальнейшем он желал посоветоваться со мною… Из разговора выяснилось, что планы «первого русского и т. д.» довольно смутны, но,

во всяком случае, не предусматривают оставления пределов России.

- Как же в таком случае совершите вы кругосветное путешествие? - с изумлением спросил я.

- Главное дело длину земного обхвата пройти, а это можно сделать и в России, - разрешил он мое недоумение. - Десять верст уже пройдено, и остается…

- Всего 37490. Счастливого пути!

Не знаю, как странствовал «первый и т. д.» на протяжении остальной части своего пути. Но что он успешно выполнил свое намерение, я нисколько не сомневаюсь. Даже если он больше вовсе не странствовал, а сразу возвратился в родное Шувалово и безвыездно проживал там, - он и в таком случае прошел не менее 40 тысяч км. Беда только, что он не первый и не единственный человек, совершивший такой подвиг. И я, и вы, и большинство других граждан нашего Союза имеют столько же прав называться «русским кругосветным путешественником пешком», в понимании шуваловского ходока. Потому что каждый из нас, какой бы он ни был домосед, успел в течение своей жизни, сам того не подозревая, пройти пешком путь даже более длинный, чем окружность земного шара. Маленький арифметический подсчет сейчас убедит вас в этом.

В самом деле. В течение каждого дня вы, конечно, не менее 5 часов проводите на ногах: ходите по комнатам, по двору, по улице, словом, так или иначе шагаете. Если бы у вас в кармане был шагомер (прибор для подсчета сделанных шагов), он показал бы вам, что вы ежедневно делаете не менее 30000 шагов, Но и без шагомера ясно, что расстояние, проходимое вами в день, очень внушительно. При самой медленной ходьбе человек делает в час 4-5 км. Это составляет в день, за 5 часов, 20-25 км. Теперь остается умножить этот дневной наш переход на 360 - и мы узнаем, какой путь каждый из нас проходит в течение целого года:

20 х 360 = 7200, или же 25 х 360 = 9000.

Итак, самый малоподвижный человек, никогда даже и не покидавший родного города, проходит ежегодно пешком около 8000 км. А так как окружность земного шара имеет 40000 км, то нетрудно вычислить, во сколько лет мы совершаем пешеходное путешествие, равное кругосветному:

40000: 8000 = 5.

Значит, в течение 5 лет вы проходите путь, по длине равный

окружности земного шара. Каждый 13-летний мальчик, если считать, что он начал ходить с двухлетнего возраста - дважды совершил уже «кругосветное путешествие». Каждый 25-летний человек выполнил не менее 4 таких путешествий. А дожив до 60 лет, мы десять раз обойдем вокруг земного шара, т. е. пройдем путь более длинный, чем от Земли до Луны (380000 км).

Таков неожиданный результат подсчета столь обыденного явления, как ежедневная наша ходьба по комнате и вне дома.

Ваше восхождение на Монблан

Задача № 64

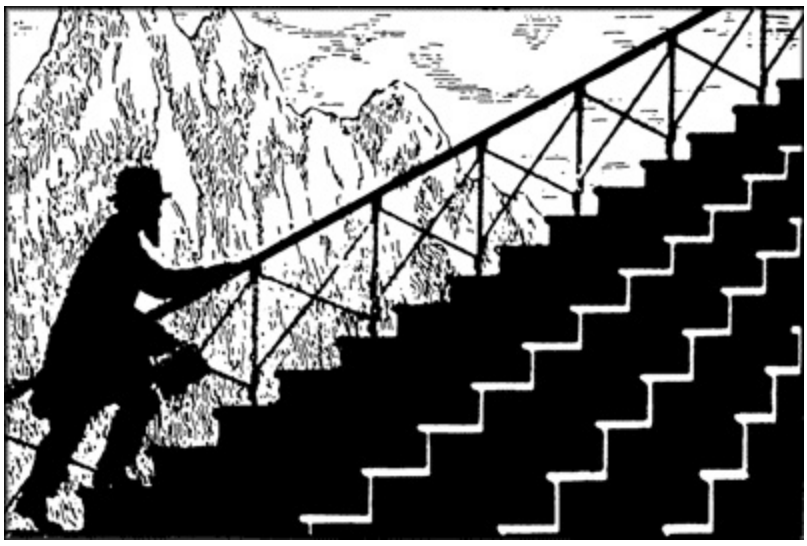
Вот еще один интересный подсчет. Если вы спросите почтальона, ежедневно разносящего письма по адресатам, или врача, целый день занятого посещением своих пациентов, совершали ли они восхождение на Монблан, - они, конечно, удивятся такому вопросу. Между тем, вы легко можете доказать каждому из них, что не будучи альпинистами, они наверное совершили уже восхождение на высоту, даже превышающую величайшую вершину Альп. Стоит только подсчитать, на сколько ступеней поднимается почтальон ежедневно, восходя по лестнице при разноске писем, или врач, посещая больных. Окажется, что самый скромный почтальон, самый занятой врач, никогда даже и не помышлявшие о спортивных состязаниях, побивают мировые рекорды горных восхождений. Подсчитайте это.

Решение

Возьмем для подсчета довольно скромные средние цифры; допустим, что почтальон ежедневно посещает только десять человек, живущих кто на втором этаже, кто на третьем, четвертом, пятом - в среднем возьмем на третьем. Высоту третьего этажа примем, для круглого числа, в 10 м: следовательно, наш почтальон ежедневно совершает по ступеням лестниц путешествие на высоту 10 х 10 = 100 м. Высота Монблана 4800 м. Разделив ее на 100, вы узнаете, что наш скромный почтальон выполняет восхождение на Монблан в 48 дней…

Итак, каждые 48 дней, или примерно 8 раз в год, почтальон поднимается по лестницам на высоту, равную высочайшей вершине Европы. Скажите, какой спортсмен ежегодно по 8 раз взбирается на Монблан?

Для врача у меня имеются не предположительные, а реальные цифры. Врачи квартирной помощи в Ленинграде подсчитали, что в среднем каждый из них за свой рабочий день поднимается к больным на 2500 ступеней.



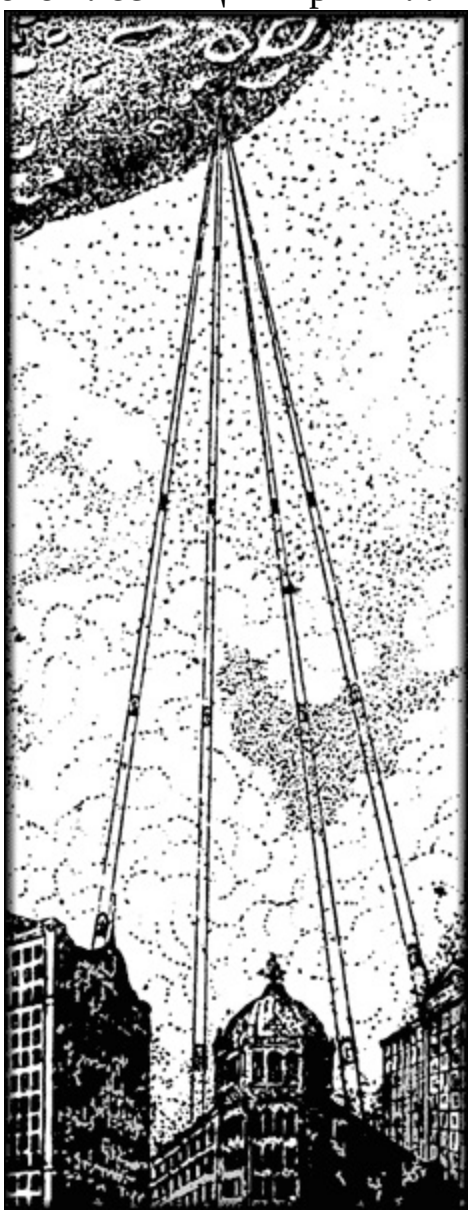
Считая высоту ступеньки равной 15 см и принимая 300 рабочих дней в году, получаем, что за год врач поднимается на 112 км, т. е. совершает 20 раз восхождение на высоту Монблана!

Не надо непременно быть почтальоном или врачом, чтобы выполнять подобные подвиги, конечно, того не ведая. Я живу во 2-м этаже, в квартире, куда ведет лестница с 20 ступеньками - число, казалось бы, весьма скромное. Ежедневно мне приходится взбегать по этой лестнице раз 5, да еще посещать двоих знакомых, живущих, скажем, на такой же высоте. В среднем можно принять, что я

поднимаюсь ежедневно 7 раз по лестнице с 20 ступенями, то есть взбегаю вверх каждый день по 140 ступеней. Сколько же это составит в течение года?

140 x 360 = 50400.

Итак, ежегодно я поднимаюсь более чем на 50.000 ступеней. Если мне суждено дожить до 60-летнего возраста, я успею подняться на вершину сказочно высокой лестницы в три миллиона ступеней (450 км)!



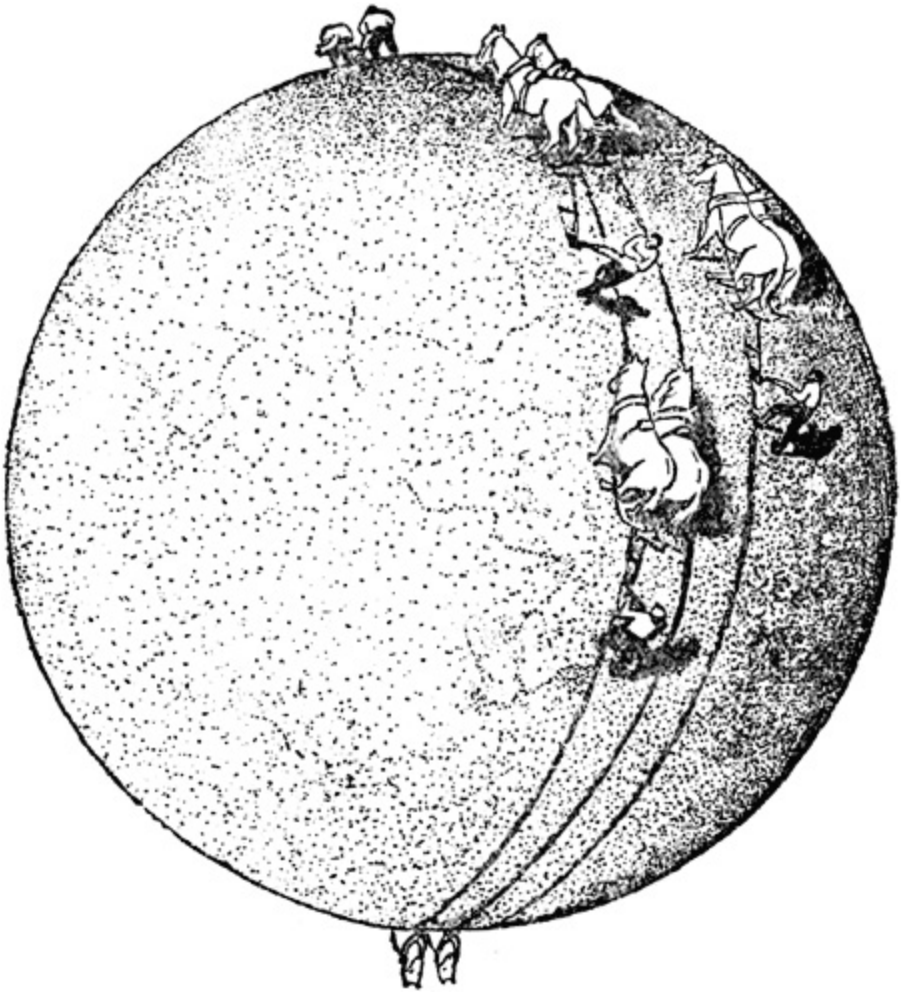
Как изумился бы я, если бы ребенком меня подвели к основанию этой уходящей в бесконечную даль лестницы и сказали, что некогда я, быть может, достигну ее вершины… На какие же исполинские высоты взбираются те люди, которые по роду своей профессии только и делают,

что поднимаются на высоту, - например служители при лифтах? Ктото подсчитал, что, например, служитель при лифте одного из Нью-Йоркских небоскребов совершает за 15 лет службы подъем до высоты… Луны!

Пахари-путешественники

Задача № 65

Взгляните на странный рисунок, приведенный на следующей странице. Кто те сказочные пахари-богатыри, что проводят борозды кругом земного шара?



Вы полагаете, рисунок - создание чересчур разыгравшейся фантазии художника? Нисколько: художник лишь изобразил наглядно то, о чем скажут вам достоверные арифметические подсчеты, если вы дадите себе труд их произвести. Каждый пахарь проходит со своим плугом в течение нескольких лет (4-6) такое расстояние, которое равно окружности земного шара. Выполнение этого неожиданного по своим результатам арифметического подсчета предоставляю читателю произвести самостоятельно.

Незаметное путешествие на дно океана

Весьма внушительные путешествия выполняют обитатели подвальных помещений, служители таких же складов и т. п. Много раз в

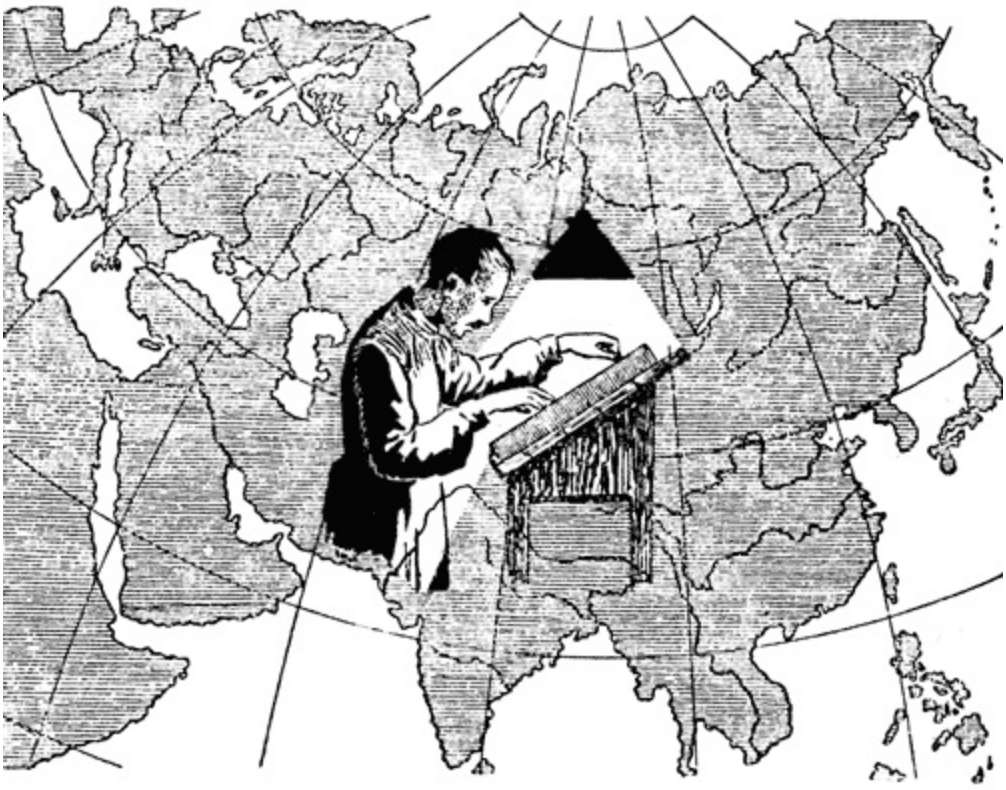
день сбегая вниз по ступенькам маленькой лестницы, ведущей в погреб, они в течение нескольких месяцев проходят расстояние в целые километры. Нетрудно рассчитать, во сколько времени мальчик-служитель подвального склада проходит, таким образом, вниз расстояние, равное глубине океана. Если лестница углубляется, скажем, всего на 2 м, и мальчик сбегает по ней ежедневно всего 10 раз, то в месяц он пройдет вниз расстояние в 30 х 20 = 600 м, а в год 600 х 12 = 7200 м - более 7 км. Вспомним, что глубочайшая шахта простирается в недра Земли всего на 2 километра!

Итак, если бы с поверхности океана вела на его дно лестница, то любой служитель подвального торгового помещения достиг бы до дна океана в течение одного года (наибольшая глубина Тихого океана - около 9 км).

Путешествующие стоя на месте

Задача № 66

Последние страницы этой книги мне хочется посвятить ее первым читателям, без деятельного сотрудничества которых она не могла бы появиться в свет. Я говорю, конечно, о наборщиках. Они также совершают далекие арифметические путешествия, не выходя из пределов наборной, даже стоя неподвижно у наборных касс. Проворная рука труженика свинцовой армии, скользя ежесекундно от кассы к верстатке, проходит за год огромное расстояние. Сделайте подсчет. Вот данные: наборщик набирает в течение рабочего дня 8000 букв, и для каждой буквы должен переместить руку туда и назад на расстояние, в среднем, около полуметра. В году считайте 300 рабочих дней.



Решение

2 х 0,5 х 8000 х 300 = 2400000 м, т. е. 2400 км.

Значит, за 16-17 лет работы даже и наборщик, не отрывающийся от кассы, совершает кругосветное путешествие. «Неподвижный кругосветный путешественник!» Это звучит оригинальнее, чем «путешественник пешком».

*** * ***

Не найдется человека, который так или иначе не совершил бы в этом смысле кругосветного путешествия. Можно сказать, что замечательным человеком является не тот, кто проделал кругосветное

путешествие, а тот, кто его не совершил. И если кто-нибудь станет уверять вас, что этого не сделал, вы, надеюсь, сможете «математически» доказать ему, что он не составляет исключения из общего правила.

КОНЕЦ

---

notes

Примечания

1

Даровитого германского математика, физика, философа и беллетриста Курда Лассвица (1848-1910) часто называют «немецким Жюль Верном», так как он был первым удачным последователем знаменитого французского романиста. Особенно широкую известность получил его большой астрономический роман «На двух планетах» (1897) - одно из лучших произведений научной фантастики. Печатаемые в настоящем сборнике два его рассказа появляются в русском переводе впервые.

Рассказ «На мыльном пузыре» написан в 1887 г. Он приведен здесь с незначительными сокращениями (исключены излишние длинноты). - *Ред.*

2

Здесь под биллионом надо понимать миллион миллионов (1.000.000.000.000). - *Ред.*

3

28 часов содержат около 100.000 секунд. - *Ред.*

4

Избрав имя, созвучное с именем Галилея, автор, по-видимому, желает подчеркнуть этим сходство судьбы обоих мыслителей. - *Ред.*

5

Или изолированная часть вселенной, за пределы которой наблюдатели не могут выйти.

6

Поучительно сопоставить с этим тот факт, что дети в начале обучения грамоте не замечают никакой разницы между и, если не видят их одновременно.

7

Не излишне отметить, что эта относительность не есть та, о которой трактует так называемый «принцип относительности» - новое учение о пространстве и времени, недавно созданное Альбертом Эйнштейном. Изложенные здесь соображения могут лишь служить некоторой подготовкой мышления к пониманию крайне трудной по своей отвлеченности теории гениального германского физика.

8

Извлечение сделано по переводу Е. М. Чистяковой-Вэр. Повесть знаменитого английского романиста появилась в подлиннике в 1894 г.

9

Отрывок из романа «Гектор Сервадак» (1877 г.). Сюжет романа - астрономический: комета задевает земной шар в области Средиземного моря и уносит с собою часть земной поверхности вместе с несколькими обитателями - французами и русскими, - благополучно пережившими катастрофу. Жизнь их на этом небесном теле - Галлии - и составляет главное содержание романа. - *Ред.*

10

Прибор для определения скорости хода судна. - *Прим. изд.*

11

Геодезический инструмент для измерения горизонтальных углов между магнитным меридианом и направлением на предмет. - *Прим. изд.*

12

Расчеты здесь и далее проверены и исправлены издателем. - *Прим. изд.*

13

Расстояние от южного до северного полюса равно 12.713,505 км, а диаметр земли на экваторе - 12.756,274 км. - *Прим. изд.*

14

Так как Галлия делала оборот вокруг Солнца в два года и этот период был разделен обитателями кометы на 12 частей, то месяцы на Галлии были также вдвое длиннее земных. - *Ред*.

15

Напряжение тяжести на поверхности небесного тела зависит, впрочем, не от одной лишь массы этого тела, но и от величины его радиуса. - *Ред.*

16

Имя торговца, также очутившегося на комете.

17

Маленькое судно.

18

Вот вес французских монет:

Золотых: 100 фр. - 32,25 грамма; 50 фр. - 16,12 г; 20 фр. - 6,45 г; 10 фр. - 3,22 г; 5 фр. - 1,61 г. Серебряных: 5 фр. - 25 г; 2 фр. - 10 г; 1 фр. - 5 г; $^1/_2$ фр. - 2,5 г. Медных: 10 сант. - 10 г; 5 с. - 5 г; 2 с. - 2 г; 1 с. - 1 г. - *Примеч. Ж. Верна.*

19

По этому поводу знаменитый астроном рассказывал о следующем забавном случае. Однажды в его гостиную вошел незнакомый ему молодой человек, вежливо поклонившийся профессору.

- С кем имею удовольствие разговаривать? - осведомился Араго.

- О, м-сье Араго. вы наверное хорошо знаете меня: я посещаю аккуратно ваши лекции, и вы не спускаете с меня взгляда во все время чтения. - *Примеч. Ж. Верна.*

20

Здесь биллионом называется миллион миллионов, а триллионом - миллион таких биллионов. В подлиннике проведена другая система наименований: биллионом (или миллиардом) называется 1000 миллионов, триллионом - миллион миллионов, и далее каждой тысяче (а не миллиону) единиц предыдущего наименования дается новое название: квадрильон, квинтильон, секстильон, септильон, октальон, нональон, декальон, эндекальон, додекальон. - *Ред.*

21

Миллиард минут истекло лишь 29 апреля 1902 г. в 10 ч. 40 м. утра. - *Ред.*

22

Числовые данные приведены в исправленном виде. - *Прим. изд.*

23

В подлиннике это число названо: «два нональона» (согласно другой системе наименования больших чисел). - *Ред.*

24

Данные о монетах приведены на 20-е годы XX века. - *Прим. изд.*

25

Английский беллетрист. Рассказ передан здесь в извлечении, по переводу И. Жаринцевой (1900 г.). - *Ред.*

26

В 1895 г. Хотя Фритьофу Нансену удалось проникнуть тогда только до 86°4' сев. широты, многие газеты, недостаточно осведомленные, поспешили оповестить, что Нансен открыл полюс. - *Ред.*

27

Угломерный инструмент для определения угловых высот небесных светил. - *Прим. изд.*

28

Число упражнений, выполняемых с помощью живого планетария, довольно велико, и их можно всячески видоизменять. Кто интересуется ими, тому советуем обратиться к книге И. Платонова «Практические занятия по начальной астрономии».

29

Написан в 1904 г. Переведен с несущественными пропусками.

30

Напомним, что на пишущей машине имеется обычно не более 80 различных знаков. - *Ред.*

31

См. примечание 1-е, в конце рассказа (стр. 84).

32

См. примечание 2-е, на стр. 85.

33

Единственно, для чего может, пожалуй, пригодиться механический способ составления фраз и отдельных букв - это для подыскания так называемых «анаграмм». Анаграммой какого-нибудь предложения называется другая фраза, составленная из тех же самых букв, что и первая, но размещенных в ином порядке. Анаграммы могут существовать даже и для сравнительно коротких фраз. Вот любопытный пример нескольких анаграмм предложения

ПРОЛЕТАРИИ ВСЕХ СТРАН, СОЕДИНЯЙТЕСЬ!

1) Не теряйте дара своих сил, проснитесь!

2) Лида, не растеряйте своих, проснитесь!

3) Радость при Ленине, сотрясайте их все!

Но и эти 4 фразы приходятся на огромное число бессмысленных сочетаний тех же букв, определяемое произведением

$1x2x3x4x5x6\ldots 30x31 = 8{,}22284x10^{33}$.

34

Доктор Вильгельм Аренс широко известен своими исследованиями в области математических игр. Главный его труд «Математические развлечения и игры», в двух больших томах, разрабатывает эту область с исчерпывающей полнотой и строгой научностью. Ему принадлежат также следующие сочинения: «Математические развлечения» (более краткое и общепонятное, чем упомянутое выше; есть русский перевод), «Старое и новое из области занимательной математики», «Забава и дело в математике», «Анекдоты о математиках». - Предлагаемый здесь очерк опубликован в 1924 г. в одном математическом сборнике и появляется на русском языке впервые. - *Ред.*

35

Во Франции игра эта более известна под названием *такен. - Ред.*

36

«Такен (игра в 15), - говорит французский математик Люка - не только весьма интересная игрушка, но также и прибор, с помощью которого чрезвычайно легко дать наглядное понятие об одном из важнейших отделов алгебры, а именно о *теории определителей*, принадлежащей Лейбницу. Поэтому теорию и практические приемы игры в такен можно считать своего рода подготовкой к изучению этой части алгебры». - *Ред.*

37

Современный английский беллетрист. Английские меры подлинника заменены метрическими, вследствие чего пришлось несколько видоизменить и самые задачи. - *Ред.*

38

Из неизданной рукописи поэта В. Г. Бенедиктова, относящейся к 1869 году.

Среди них известный сборник Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки» (из трех его книг 2-я и 3-я составлены при участии автора предлагаемого сборника) почти исчерпывает весь «классический» материал арифметических развлечений.

40

Адрес для корреспонденции: Ленинград, Стремянная ул., 4. Кооперативное Издательство «Время». Якову Исидоровичу Перельману.

41

Вечерний выпуск газеты «Биржевые Ведомости» от 16 марта 1917 г.

42

Их было много тогда в Ленинграде. Позднее я узнал, что китайский иероглиф для 10 имеет как раз указанную форму креста (китайцы не употребляют наших «арабских» цифр).

43

Это показывает, что описываемые знаки были в широком употреблении среди населения.

44

Торговцы, вразнос продающие галантерейные товары, книжки, лубочные картинки. - *Прим. изд*.

45

Расположение чисел здесь такое, какое принято теперь в Англии и Америке (а в прежнее время употреблялось и в русских учебных книгах): частное и делитель пишутся по обе стороны делимого.

46

Английское название игры «div-al-et» - сокращение от «division by letters», т. е. деление с помощью букв.

Желающие применить эту систему на практике при устройстве библиотеки найдут все необходимые сведения в книге Международного Библиографического Института «Десятичная классификация». Перевод под редакцией проф. А. М. Ловягина (Ленинград, 1923).

48

Семикосточковые счеты в Китае чрезвычайно распространены; они изготовляются всевозможных размеров, до самых миниатюрных (у меня имеется привезенный из Китая экземпляр в 17 мм длины и 8 мм ширины).

49

Этот прием полезен и для устного деления на 9.

50

Перечисленные приемы умножения указаны в старинной «Арифметике» Николая Тартальи. Наш современный способ умножения описывается там под названием «шахматного».

51

Венеция и некоторые другие государства Италии в XIV-XVI столетиях вели обширную морскую торговлю, и потому в этих странах приемы счета были, ради коммерческих надобностей, разработаны раньше, чем в других. Лучшие труды по арифметике появились в Венеции. Многие итальянские термины коммерческой арифметики сохранились еще в настоящее время.

52

Старинный русский учебник математики, охватывающий все ее отделы. Это - одна из тех двух книг, которые Ломоносов назвал «вратами своей учености». Подробное заглавие ее таково: «Арифметика, сиречь наука числительная, повелением царя Петра Алексеевича в великом граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков и всякого чина и возраста людей на свет произведена в лето от рождества бога слова 1703».

53

Последние две девятки приписаны к делителю в процессе деления.

54

Выясняется попутно при выводе признака делимости на 9 (читатель найдет вывод в моей «Хрестоматии-задачнике по начальной математике»).

55

См. составленные мною «Таблицы и правила для вычислений». Изд. Промбюро. Ленинград, 1926 г.

56

Папирус был разыскан английским египтологом Генри Риндом; он оказался заключенным в металлический футляр. В развернутом виде имеет 20 метров длины, при 30 сантиметрах ширины. Хранится в Британском Музее, в Лондоне.

57

Звание «писец» принадлежало третьему классу египетских жрецов; в ведении их находилось «все относившееся к строительной части храма и к его земельной собственности». Математические, астрономические и географические знания составляли их главную специальность (В. Бобынин).

58

Составитель был бы весьма признателен за письменные сообщения (по адресу, указанному в предисловии).

59

«Природа и Люди» (потом она была перепечатана мною в сборнике Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки»).

60

Ответ 1146.

61

Ответ НН, где буквою Н обозначена «цифра 13».

62

Зато, как увидим далее, для такой системы до крайности упрощаются таблица сложения и таблица умножения.

63

Нечетное число, умноженное на себя (т. е. на нечетное) всегда дает нечетное число (например, 7Ч7:=49, 11Ч11=121 и т. п.).

64

Древние (последователи Пифагора) считали 9 символом постоянства, так как все числа, кратные 9, имеют сумму цифр, кратную 9-ти.

65

Как распространено это суеверие даже и в нашу эпоху, видно из того, что при устройстве электрического трамвая в Ленинграде (тогда Петербурге) первое время не решались вводить маршрута № 13, а пропустив его, сразу перешли к № 14: опасались, что публика побоится ездить в вагонах с таким «роковым» номером. Любопытно то, что в Ленинграде есть немало домов, где 13-й номер квартиры пропущен… В гостиницах также нередко отсутствует комната № 13. Для борьбы с этим ничем не обоснованным числовым суеверием на Западе (в Англии) учреждены даже особые «клубы числа 13».

66

В двоичной системе счисления, как мы уже объясняли (см. стр. 195-196), все умножения именно такого рода. На этом примере мы наглядно убеждаемся в преимуществах двоичной системы.

67

Если множитель кратен 7, то результат равен числу 999999, умноженному на число семерок в множителе; такое умножение легко выполнить в уме. Например, 142857 x 28 = 999999 x 4 = 4000000-4 = 3999996.

68

Русский перевод (вольный) Жуковского. Эпизод, о котором далее идет речь, описан в главе VIII этой повести.

69

Можно пользоваться и простыми карточками с соответствующими надписями.

70

Проходившие алгебру знают, что и число 1 можно рассматривать, как степень 2-х, именно нулевую.

71

Единицу можно рассматривать как нулевую степень (вообще - как нулевую степень каждого числа).

72

Это свойство разности вытекает на «правила остатков», о котором мы упоминали раньше, на стр. 173.

73

Нетрудно ввести поправку и на високосные годы.

74

Указанными далее приемами ускоренного умножения эти операции облегчаются до чрезвычайности, и миллионный результат получается очень быстро. Советую читателю попробовать произвести то же вычисление и обыкновенным путем, чтобы на деле убедиться, какая экономия во времени получается при пользовании указанной формулой и нижеприведенными приемами.

Впрочем, в последние годы способ этот снова стал входить в употребление, - главным образом, благодаря деятельной пропаганде замечательного германского счетчика, инженера Ф. Ферроля. В Америке выдающиеся педагоги высказывались за введение его в школе взамен нынешнего, довольно медленного способа.

76

Старый стиль - летоисчисление по юлианскому календарю, новый стиль - по григорианскому календарю. - *Прим. изд*.

77

Деля 1904 на 28, мы уже учли, что 1904-й год - високосный; беря же в феврале 29 дней, мы учитываем это обстоятельство второй раз. Поэтому надо лишний день откинуть.

78

На стр. 268 приложен чертеж такого циферблата.

79

Способов сокращенного вычисления календарных дат существует множество. Я изложил здесь самый простой из известных мне приемов, употребляемый упомянутым выше германским математиком Ф. Ферролем, прославившимся своими поразительно быстрыми устными вычислениями.

80

В книге «Положение человека во вселенной».

81

Фут - единица измерения расстояния, 30,48 см. - *Прим. изд*.

82

Например, взаимные расстояния планет измеряются десятками и сотнями миллионов километров, расстояния звезд - миллионами миллионов километров, а число молекул в кубическом сантиметре окружающего нас воздуха - миллионами миллионов миллионов. - *Я. П.*

83

Отметим, для сведения, что в году (астрономическом) 31.556.926 секунд; миллион секунд в точности равен 11 суткам 13 час. 46 мин. 40 сек.

84

До какой степени люди склонны недооценивать величину миллиона, показывает следующий поучительный пример. Тот самый Уоллес, который так предостерегает других от преуменьшения миллиона, заканчивает приведенный выше (стр. 273-275) отрывок таким советом: «В маленьких размерах каждый может устроить это сам для себя: стоит только достать сотню листов толстой бумаги, разлиновать их на квадратики и поставить крупные черные точки. Подобное изображение было бы очень поучительно, хотя не в такой, конечно, степени, как осуществленное в большом масштабе». Почтенный автор, по-видимому, полагал, что подобная работа вполне под силу одному человеку.

85

Мы проделали здесь умножение несколько необычным путем - вместо умножения числа только дважды заменили самую единицу меры другою, в тысячу раз большею. Этот прием очень удобен для устных подсчетов, и им следует пользоваться при выкладках с метрическими мерами.

Надо заметить, впрочем, что обычные цифровые обозначения весьма больших чисел и их названия употребляются лишь в популярно-научных книгах; в книгах же строго научных по физике и астрономии пользуются обыкновенно иным способом обозначения: биллион обозначается 10^{12}, триллион 10^{18}, двадцать семь тысяч биллионов - 27 х 10^{15} и т. д. При таком способе обозначения сберегается место и, кроме того, гораздо легче производить над числами различные действия (по правилам, изучаемым в алгебре).

87

Книга написана в 1926 г. - Прим. изд .

88

Ботокуды - народность общей численностью 2 тыс. чел., проживающая на территории Бразилии. - *Прим. изд*.

89

В каждом кубич. сантиметре воздуха (т. е. примерно в наперстке) насчитывается - отметим кстати - от 20 до 30 триллионов молекул. Как велико это число, видно, между прочим, из того, что достигнув с помощью совершеннейших воздушных насосов самой крайней степени разрежения - в сто миллиардов раз, - мы все-таки будем еще иметь в каждом куб. сантиметре до 270 миллионов молекул! Не знаешь, чему изумляться больше: огромной численности молекул или их невообразимой малости…

90

Магницкий придерживался той классификации чисел, которая дает каждое новое наименование миллиону низших единиц (биллион - миллион миллионов, и т. д.). Такая система наименований больших чисел принята была и в более поздних русских школьных руководствах (насколько я могу судить по имеющимся у меня русским учебникам конца XVIII и начала XIX века). И лишь сравнительно недавно получила у нас распространение нынешняя, «обиходная» система наименования.

91

Световой год - путь, проходимый лучом света в 1 год (свет пробегает в секунду 300000 км); он равен примерно 9 $^{1}/_{2}$ биллионам км.

92

Лотце «Древность Земли».

93

Имеются в виду линейные размеры (а не объемы), т. е поперечник атома, диаметр солнечной системы, высота или длина дома и т. п.

94

Фурнье Дальб «Два новых мира» (есть русский перевод).

95

Небезынтересно отметить, что Архимед в своем исчислении песчинок определял объем вселенной в 5×10^{54} куб. см.

96

Шувалово - небольшая станция в 10 километрах от Ленинграда.